אינפי 4 - תרגול 5

17 באוגוסט 2011

תרגיל

חשב את עבודת הכח:

$$F = -y^2\hat{i} + x^2\hat{j}$$

לאורך החצי העליון של האליפסה

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

לפי כיוון השעון.

$$W = \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = \int_L -y^2dx + x^2dy$$

נעשה פרמטריזציה:

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t;\ dx = -3\sin t \\ y &= 2\sin t;\ dy = 2\cos t \\ 0 \leq & t \leq \pi \end{aligned}$$

כאשר t רץ מ-π עד 0 (כי זה נגד כיוון השעון) לכן:

$$\begin{aligned} W &= \int_\pi^0 -4\sin^2 t\,(-3\sin t) + 9\cos^2 t\,(2\cos t)\,dt \\ &= \int_\pi^0 12\sin^3 t + 18\cos^3 t dt \\ &= -12\int_\pi^0 \left(1-\sin^2 t\right) d\left(\cos t\right) + 18\int_\pi^0 \left(1-\sin^2 t\right) d\left(\sin t\right) \\ &= -12\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)|_\pi^0 + 18\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)|_\pi^0 = -16 \end{aligned}$$

תרגיל

חשב את האינטגרל הקווי:

$$\int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr}$$

כאשר:

$$\overrightarrow{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + z^2\hat{k}$$

כאשר C נתון ע"י פרמטריזציה:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin t \cdot \hat{i} + \cos t \cdot \hat{j} + t^2\hat{k} \\ 0 \leq \; t &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

בכיוון עליית הפרמטר (בכיוון החיובי, נגד כיוון השעון).

$$dr = \cos t \cdot \hat{i} - \sin t \cdot \hat{j} + 2t\hat{k}$$

אז:

$$\int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t - \sin^2 t \cos t + 2t^5 = \frac{2}{6} t^6 |_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{192}$$

משפט גרין

$$\int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dxdy$$

התנאים למשפט הם:

1. $Q(x, y)\,,\, P(x, y) \in C^1$
2. D תחום דו-מימדי ששפתו C - עקום חלק לחלקים.
3. מגדירים את הכיוון החיובי של C כך שהתחום D נמצא משמאלו.

תרגיל

חשב באמצעות משפט גרין את

$$\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(2x + \cos\left(y^2\right)\right) dy$$

כאשר C הוא שפת התחום בין העקומות:

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

פתרון

$$I = \iint_D (2-1)\, dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dxdy = \frac{1}{3}$$

תרגיל

$$\int_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$$

כאשר C הוא משולש שקודקודיו הם:

$$\begin{aligned} C &= (1,\,3)\\ B &= (2,\,2)\\ A &= (1,\,1)\end{aligned}$$

וכיוונו חיובי ($A\to B\to C\to A$).

$$\begin{aligned} I &= \iint_D Q_x-P_y dxdy\\ &= \iint_D 2x+2y-4ydxdy\\ &= 2\iint_D (x-y)\,ds\end{aligned}$$

הקווים הם:

$$\begin{aligned} AB:\ y &= x\\ BC:\ y &= 4-x\\ CA:\ x &= 1\end{aligned}$$

אז:

$$I=2\int_1^2\int_x^{4-x}x-ydxdy=-\frac{4}{3}$$

חישוב שטח לפי משפט גרין

השטח של גוף D הוא:

$$\iint_D 1\cdot dxdy=\int_{\partial D}P\left(x,\,y\right)dx+Q\left(x,\,y\right)dy$$

ומתקיים

$$1=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

יש 3 דוגמאות נוחות להשתמש בהן עבור P וQ:

$$\begin{aligned} P &= 0,\,Q=x\Rightarrow\int_C xdy\\ P &= -y,\,Q=0\Rightarrow-\int_C ydx\\ P &= -\frac{1}{2}y,\,Q=\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{1}{2}\int -ydx+xdy\end{aligned}$$

תרגיל

חשבו שטח של תחום המוגבל ע"י אליפסה:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \\ 0\leq\ & t \ \leq 2\pi \end{aligned}$$

שיטה 1

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a\cos t\frac{d\left(b\sin t\right)}{dt}dt \\ &= ab\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt \\ &= ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}1+\cos 2tdt \\ &= \frac{ab}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)|_0^{2\pi}=ab\pi \end{aligned}$$

שיטה 2

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^{2\pi} b\sin t\cdot\frac{d\left(a\cos t\right)}{dt}dt=-ab\int_0^{2\pi}-\sin^2 tdt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=ab\pi \end{aligned}$$

שיטה 3

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}-ydx+xdy=\frac{1}{2}\left(ab\pi+ab\pi\right)=ab\pi$$

תרגיל

מצא עקומה סגורה פשוטה (מתאימה לתנאי משפט גרין) שלאורכה יש לאינטגרל

$$\int_C\frac{1}{3}y^3dx+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)dy$$

ערך מקסימלי.

פתרון

$$I=\iint_D Q_x-P_y ds=\iint_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$$

נשים לב שהפונקציה $1-x^2-y^2$ חיובית בתוך מעגל היחידה ושלילית מחוץ למעגל היחידה ולכן הערך מקסימלי הוא כאשר D הוא עיגול היחידה, ולכן C הוא מעגל היחידה.

תרגיל

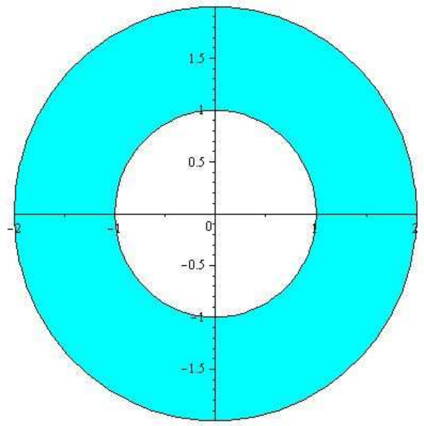
נחשב אינטגרל קווי:

$$\int_C xe^{-2x}dx+\left(x^4+2x^2y^2\right)dy$$

כאשר C היא שפת התחום הכלוא בין שני המעגלים:

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=1\\x^2+y^2&=4\end{aligned}$$

התחום:



$$\begin{aligned}I&=\iint_D Q_x-P_y ds\\&=\iint_D\left(4x^3+4xy^2-0\right)ds\\&=\iint_D 4x\left(x^2+y^2\right)ds\\&=\int_0^{2\pi}\int_1^2 4r\cos\theta\cdot r^2\cdot rdrd\theta=0\end{aligned}$$

משפט

אם

$$F\left(x,\,y,\,z\right)=\left(P,\,Q,\,R\right)$$

שדה רציף בתחום V אז התנאים הבאים שקולים:

1. לכל מסלול C סגור ב־V מתקיים

$$\int_C \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = 0$$

בדו מימדי:

$$\int Pdx + Qdy = 0$$

2. F שדה משמר.

3. קיימת פונק' $u(x, y, z) \in C^1$ ב־V כך שמתקיים:

$$\begin{aligned} \nabla u &= F \\ \int_{A\to B} \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} &= u(b) - u(a) \end{aligned}$$

u נקראת הפוטנציאל של F.

4. אם V פשוט קשר אז

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

($\nabla \times F$ נקרא גם $rot(F)$ או $curl(F)$)

תרגיל

האם השדה

$$F(x, y, z) = (yz,\ xz + 2y,\ xy + 1)$$

משמר? אם כן, חשב את הפוטנציאל שלו.

פתרון

נבדוק האם הוא משמר:

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + 2y & xy + 1 \end{vmatrix} \\ &= (x - x)\hat{i} + (y - y)\hat{j} + (z - z)\hat{k} = 0 \end{aligned}$$

לכן השדה משמר בתחום פשוט קשר.

$$\begin{aligned}
u\left(x,\,y,\,z\right) &= \int P\left(x,\,y,\,z\right)dx = xyz + G\left(y,\,z\right)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= Q\\
\frac{\partial G}{\partial y} + xz &= xz + zy\\
G_y &= 2y\\
G &= y^2 + H\left(z\right)\\
u &= xyz + y^2 + H\left(z\right)\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= R\\
xy + H_z &= xy + 1\\
H_z &= 1\\
H &= z + c\\
u &= xyz + y^2 + z + c
\end{aligned}$$