(1) 22.12.13
אנליזה פונ
הרצאה 9

אינטגרל לבג

תזכורת: $f(x)=\sum c_n 1_{B_n}(x)$ פשוטה. $B_n\subset A$

$$\int_A f\,d\mu = \underbrace{\sum c_n\mu(B_n)}_{\text{דרוש שיתכנס בהחלט}}$$ אינטגרל לבג

אם g מדידה, $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} g$, אז: $\int_A g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$

משפט: אם $A=\dot{\bigcup_n} A_n$, $A_i\cap A_j=\emptyset$! $i\neq j$, $\int_A f\,d\mu$ קיים.
אז $\int_{A_n} f\,d\mu$ קיים לכל n ! $\int_A f\,d\mu=\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu$, וצד ימין מתכנס בהחלט.

[אם פונ' אינטגרבילית באיחוד קבוצות היא אינטגרבילית בכל תת קבוצה שלה והאינטגרל על A שווה לסכום האינטגרלים על A_n]

הוכחה: א. נניח תחילה ש f פשוטה, כלומר: $f=\sum 1_{B_n}c_n$, B_n זרות.

נגדיר: $B_{nk}=B_n\cap A_k$. $B_n=\dot{\bigcup_k} B_{nk}$

$$\int_A f\,d\mu=\sum_n c_n\mu(B_n)=\sum_n c_n\cdot\sum_k\mu(B_{nk})=\sum_k\underbrace{\sum_n c_n\mu(B_{nk})}_{\text{מתכנס בהחלט}}=\sum_k\int_{A_k} f\,d\mu$$

f פשוטה אינטגרבילית אם הטור הזה מתכנס בהחלט (זוהי ההגדרה לאינטגרביליות)

$B_n=\dot{\bigcup_k} B_{nk}$ ניתן לפרק את B_n לאיחוד זר של B_{nk}. וסכום המידות שלהם שווה למידה של הסכום

התכנסות בהחלט - מותר לשנות סדר סכימה (לא תמיד מותר לשנות סדר סכימה, אבל אם הטור מתכנס בהחלט, מותר)

סכום של כל האינטגרלים של f על A_k

$f|_{A_k}=\sum_n 1_{B_{nk}}\cdot c_n$ ← f רק בתחום של A_k

ב. f מדידה כלשהי. בהינתן ε ישנה g פשוטה שמקרבת את f ב A:
$|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in A$.

מסעיף א': $\int_A g\,d\mu=\sum_n\int_{A_n} g\,d\mu$ כי g פשוטה ולפשוטות הוכחנו

את g הפשוטה אפשר ~~לפרק~~ לכתוב כסכום

(*) $\left|\int_A f\,d\mu-\int_A g\,d\mu\right|<\varepsilon\mu(A)$ האינטגרל של g קרוב לאינטגרל של f

נשים לב ש $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in A_n$, $\forall n$ [g מקרבת את f גם על A_n]

g אינטגרבילית על A_n ולכן f אינטגרבילית על A_n (כי ניתן לקרב את f כרצוננו ע"י g) (כי מקרבים את f ע"י סדרת פונ' אינטגרביליות פשוטות)

② 22.12.13 (המשך) [illegible]
הרצאה 9

$$\left|\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu-\sum_n\int_{A_n} g\,d\mu\right|\le\sum_n\int_{A_n}\underbrace{|f-g|}_{<\varepsilon}\,d\mu\le\sum_n\varepsilon\mu(A_n)=\varepsilon\mu(A)$$

מ $*$, $**$ ומהאדיטיביות ש $\int_A g\,d\mu=\sum\int_{A_n} g\,d\mu$ נובע ש:

$$\left|\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu-\int_A f\,d\mu\right|<2\varepsilon\mu(A)$$

$|a-b|<\varepsilon$
$|c-b|<\varepsilon$
$\Downarrow$
$|a-c|<2\varepsilon$

ε היה שרירותי, ולכן יש שוויון:

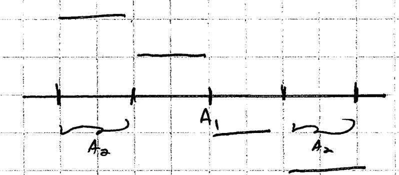
$$\int_A f\,d\mu=\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu$$

האם קיים משפט הפוך?

לא תמיד: אפשר שיש $0=\int_{A_n} f\,d\mu$ אבל $\int_A f\,d\mu\neq 0$

$$\int_{A_n} f\,d\mu=0$$
$$\int_{A_n}|f|\,d\mu=2^n$$

f לא אינטגרבילית על $\cup A_n$.



היינו רוצים משפט הפוך: אם f אינטגרבילית על A_n לכל n, $A=\cup A_n$, $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$.
! $\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu$ מתכנס בהחלט, אז f אינטגרבילית על A ו!:

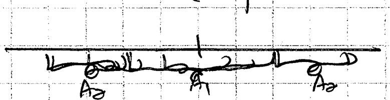
$$\int_A f\,d\mu=\sum_n\int_{A_n} f\,d\mu$$

אם זה לא נכון. דוגמא נגדית: נבנה f פונקציה על $A=\cup A_n$, כך ש:

$\int_{A_n} f\,d\mu=0$ אבל $\int_{A_n}|f|\,d\mu=2^n$ ואז f לא תהיה אינטגרבילית על A

[אם f אינטגרבילית אז $|f|$ אינטגרבילית. ולכן זה לא מתקיים]

למרות שכל התנאים התקיימו!



למשל, נקח $A=[-1,1]$, $A_n=\left[-\frac{1}{2^n},-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cup\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$

$$f(x)=\begin{cases}-4^n & x\in A_n\ \ x<0\\ 4^n & x\in A_n\ \ x>0\end{cases}$$

ניתן לכתוב "משפט הפוך מתוקן" (עם כמה שינויים כך שיתקיים)

אם $A=\bigcup_n A_n$ ו $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$, $\overbrace{\text{והטור}}^{f\text{ אינט' על }A}$ $\sum_n\int_{A_n}|f|\,d\mu$ מתכנס

אז f אינטגרבילית על A ! $\int_A f\,d\mu=\sum\int_{A_n} f\,d\mu$

הטור של הערכים המוחלטים של f מתכנס!
(לא של f כמו במשפט ההפוך [illegible])

③ 22.12.13

אנליזה פונ'

אי שוויון צ'בישב (מרקוב)

אם $\varphi(x) \ge 0$ ו- $c \ge 0$ אז: $\mu(\{x : \varphi(x) > c\}) < \frac{\int_A \varphi\, d\mu}{c}$ הרצאה ע

[מרקוב מהסתברות: $P(X > c) < \frac{E(X)}{c}$]

<u>הוכחה:</u> נסמן $A' = \{x : \varphi(x) > c\}$

$$\int_A \varphi\, d\mu = \int_{A'} \varphi\, d\mu + \underbrace{\int_{A \setminus A'} \varphi\, d\mu}_{\ge 0} \ge \int_{A'} \varphi\, d\mu \ge \int_{A'} c\, d\mu = c \cdot \mu(A')$$

המשפט הקודם - אדיטיביות

≥ 0 כי φ חיובית

כי $\varphi(x) > c$ $\forall x \in A'$

<u>משפט:</u> (רציפות מוחלטת של אינטגרל לבג)

אם f אינטגרבילית על A אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $\left|\int_B f\, d\mu\right| < \varepsilon$, לכל קבוצה $B \subset A$ שמקיימת $\mu(B) < \delta$.

<u>הוכחה:</u> אם f חסומה המשפט ברור [אם $|f| < M$ ניתן לקחת $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$]

באופן כללי, אם f לא חסומה:

$$A_n = \{x \in A : n \le |f(x)| \le n+1\}$$

מחלקת את A לפי הרמות של f

$$A = \bigcup A_n$$

ולכן:
$$\int_A |f|\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} |f|\, d\mu$$

לכן יש N כך ש $\left|\sum_{n \ge N} \int_{A_n} |f|\, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*) (הזנב של הטור)

כעת נקח $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$. תהי $B \subset A$ עם $\mu(B) < \delta$, ~~$B = B_1 \cup B_2$~~

כאשר $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$, $B_2 = B \cap \left(\bigcup_{n \ge N} A_n\right)$

החלק שנמצא בתחילת הטור "הראשונים של הטור"

בסוף הטור "הסופיים של הטור"

$\mu(B_1) \le \mu(B) < \frac{\varepsilon}{2N}$ ו- $f(x) \le N$ לכל $x \in B_1$ לכן: $\left|\int_{B_1} f\, d\mu\right| < N \cdot \mu(B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

[אם הקבוצה מספיק קטנה, היא חסומה של הטור?]

$$\int_{B_2} f\, d\mu \le \int_{B_2} |f|\, d\mu = \sum_{n \ge N} \int_{B_2 \cap A_n} |f|\, d\mu \le \sum_{n \ge N} \int_{A_n} |f|\, d\mu \underset{\text{מ(*)}}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

וקיבלנו:
$$\int_B f\, d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_2} f\, d\mu < \varepsilon$$

(4) 22.12.13

[illegible] הרצאה 9

תהי f אינטגרבילית על A. נגדיר פונקציה F על תת קבוצות של A

ע"י $F(B)=\int_B f\,d\mu$.

המשפטים שהוכחנו מראים ש F פונקציה סיגמה אדטיבית:

$$F\left(\bigcup B_n\right)=\sum F(B_n)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\bigcup B_n} f\,d\mu=\sum\int_{B_n} f(\mu)$$

אם f חיובית, אז $F(B)\geq 0$ לכל $B\subseteq A$ מדידה.

כלומר $F(B)=\int_B f\,d\mu$ מידה σ אדטיבית על A

בנוסף, אם המידה של קבוצה B היא 0, $m(B)=0$, אז $F(B)=0$

(נובע מהמשפט על רציפות בהחלט (אם $\delta=0$ אז $[\,|\int f\,d\mu|=0\,]$)

לכן קוראים שהמידה $F(\cdot)$ רציפה בהחלט ביחס ל μ.

[דוגמא למשתנים מקריים רציפים - משתנים וכו'..]

<u>משפט</u> [התכנסות חסומה של לבג Dominated convergence theorem]

אם $\{f_n\}$ מדידות מתכנסות כמעט בכל מקום ל f על A, ואם $|f_n(x)|\leq\varphi(x)$ כמעט לכל $x\in A$

ו φ אינטגרבילית על A, <u>אז</u> f אינטגרבילית על A!:

$$\lim\int_A f_n\,d\mu=\int_A f\,d\mu$$

$$\left[\int\left(\lim_{n\to\infty}f_n\right)d\mu\right]$$

<u>הוכחה:</u> $|f(x)|\leq\varphi(x)$ כמעט לכל $x\in A$ ולכן f אינטגרבילית.

יהי $\varepsilon>0$. מהמשפט על רציפות בהחלט של האינטגרל, יש $\delta>0$ כך שאם $\mu(B)<\delta$

אז $\int_B\varphi\,d\mu<\frac{\varepsilon}{4}$ [ולכן גם $|\int_B f_n\,d\mu|<\frac{\varepsilon}{4}$, $|\int_B f\,d\mu|<\frac{\varepsilon}{4}$]

צריך להוכיח שני חילופי אינטגרל והגבול

כעת נשתמש במשפט יגרוב (שלא הוכחנו) שאומר שאם $f_n\to f$ כמעט בכל מקום, אז לכל δ יש קבוצה B, $\mu(B)<\delta$, כך ש $f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}f$ על $A\setminus B$.

מהמשפט נבחר B כזו עם $\mu(B)<\delta$ ואז $f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}f$ על $A\setminus B$ ולכן יש N כך

ש: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2\mu(A\setminus B)}$ לכל $x\in A\setminus B$ $\forall n>N$

(אם הולכים מספיק רחוק בסדרה אז קרובים בה תוך זמנים)

אנליזה סוף הרצאה 9

$$\left|\int_A f\,d\mu - \int_A f_n\,d\mu\right| = \left|\int_{A\setminus B}(f-f_n)\,d\mu + \int_B f\,d\mu - \int_B f_n\,d\mu\right|$$

$$\le \left|\int_{A\setminus B}(f-f_n)\,d\mu\right| + \underbrace{\left|\int_B f\,d\mu\right| + \left|\int_B f_n\,d\mu\right|}_{\text{מרציפות במידה}}$$

$$\le \mu(A\setminus B)\cdot\frac{\varepsilon}{2\mu(A\setminus B)} + 2\int_B \varphi\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

דוגמא: $f_n(x) = \begin{cases} n & 0<x<\frac{1}{n} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $\qquad f_n \to 0$ (נקודתית בכל מקום)
(בכל x החל ממקום מסוים n יהיה 0)

$\forall x\ \exists N: f_n(x)=0\ \ \forall n>N \qquad \int f_n\,d\mu = 1\ \ \forall n \qquad \int 0\,d\mu = 0$

$f_n(x)\to 0\ \ \forall x$

הערה: גם $f_n \xrightarrow{\text{במ״ש}} f$ על A $\qquad \int_A f_n\,d\mu \to \int_A f\,d\mu$

התכנסות מונוטונית

<u>משפט:</u> (בפו לוי): אם $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots f_n(x)\le\cdots$ על A

ו f_n אינטגרביליות על A ו- $\int_A f_n\,d\mu \le K$, K קבוע

אז $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים סופית כמעט לכל $x\in A$, ו f אינטגרבילית על A

ומתקיימת $\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu$

[בנקודות בהן f_n לא מתכנסת ניתן להגדיר את f כרצוננו, למשל $f=0$
בכל נקודה כזו]

<u>הוכחה:</u> ניתן להניח ש $f_n(x)\ge 0$ לכל n,x, אחרת, נעבור ל $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x) \ge 0$.

לכל x $\{f_n(x)\}_n$ סדרה מונוטונית עולה, לכן או שהיא מתכנסת או שהיא שואפת ל ∞.

$\mu(\{x: f_n(x)\ge m\}) \le \int \frac{f_n}{m}\,d\mu \le \frac{K}{m}$.

צ׳בישב

~~לכן:~~ $\cancel{\{x: f_n(x)\to\infty\} = \bigcap_m \{x: \exists N\ f_n(x)\ge m\} = \bigcap_m\bigcup_N \{f_n(x)\ge m\ \forall n>N\}}$

$A_{n,m} = \{x: f_n(x)\ge m\} \qquad \mu(A_{n,m}) \le \frac{K}{m} \qquad A_{n,m}\subset A_{n+1,m}$

$\mu\left(\bigcup_n A_{n,m}\right) \le \frac{K}{m} \qquad \left[\bigcup_{n=1}^{N} A_{n,m} = A_{N,m}\right]$ סדרה עולה

$\{x: \lim f_n(x) = \infty\} \subset \bigcap_m\left(\bigcup_n A_{n,m}\right)$

$\mu(\{x: \lim f_n(x)=\infty\}) \le \mu\left(\bigcup_n A_{n,m}\right) \le \frac{K}{m} \quad \forall m$

$\Rightarrow \mu(\{x: \lim f_n(x) = \infty\}) = 0$

$\Leftarrow$ הוכחנו שהגבול $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים סופית כ״מ לכל $x\in A$

(6) 22.12.13

שאלה פה

הרצאה 9

כעת ~~...~~ רוצים להוכיח ש f אינטגרבילית! ול $\int f = \lim \int f_n$.

שאפשר להחליף אינטגרציה בגבול

נגדיר: $r \le |f(x)| < r+1$ $\quad \varphi(x) = r+1$ $\quad r$ טבעי

$\Downarrow$

$\varphi(x) = \lfloor |f(x)| \rfloor + 1$

ערך שלם

להפריד את f ל φ שהיא פונקצית מדרגות (יותר קל לעשות אינטגרל)

נסמן: $A_r = \{x : r-1 \le |f(x)| < r\}$
$= \{x : \varphi(x) = r\}$

<u>טענה:</u> φ אינטגרבילית [וגם המשפט ינבע ממשפט ההתכנסות החסומה כי f ו f_n חסומות ע"י φ].

נסמן: $B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r$. על B_s, f, f_n חסומות ע"י s.

ולכן ניתן להשתמש במשפט ההתכנסות החסומה

$\{x : \varphi(x) \le s\}$ $\quad \varphi(x) \le f(x)+1$

המידה של B_s חסומה ע"י המידה של A

$$\int_{B_s} \varphi \, d\mu \le \int_{B_s} (f(x)+1)\, d\mu = \int_{B_s} f \, d\mu + \int_{B_s} 1 \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n \, d\mu + \int_{B_s} 1 \, d\mu \le K + \mu(B_s)$$
$$\le K + \mu(A)$$

ניתן להשתמש במשפט ההתכנסות החסומה על B_s כי f, f_n חסומות שם [גם לחילופין φ אינטגרבילית על B_s כי היא חסומה ומדידה]

האינטגרלים חסומים ע"י K, ולכן גם בגבול שלהם חסומים ע"י K.

פונ' פשוטה

המידה של הקבוצה בה הפונקציה r

$$\int_{B_s} \varphi \, d\mu = \sum_{r=1}^{s} r \cdot \mu(A_r) \le \underbrace{K + \mu(A)}_{\text{החסם מעבר}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} r \mu(A_r)}_{\int_A \varphi \, d\mu} \le K + \mu(A)$$

אם הרישא של הטור חסומה ע"י משהו, אז גם הטור חסום ע"י אותו דבר

כלומר φ אינטגרבילית