פתרון המבחן בקישור הבא.

א [עריכה]

קבע לאילו ערבי x הטור הבא מתכנס ומצא את סכומו

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(ln(1+\frac{1}{|x|})\right)^n$$

בסופו של יום מדובר בטור הנדסי כאשר $q=-\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)$

הוא מתכנס אם ורק אם $-1<q<1$ וסכומו הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1+\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)}$$

מתי $|q|<1$?

צריך

$$\ln\left(1+\frac{1}{|x|}\right)<1$$

ולכן צריך

$$1+\frac{1}{|x|}<e$$

$$\frac{1}{|x|}<e-1$$

$$\frac{1}{e-1}<|x|$$

ב [עריכה]

קבע האם הטור הבא מתכנס בהחלט/בתנאי/מתבדר:

$$\sum\frac{(-1)^n}{ln(n!)}$$

ברור שאיברי הסדרה שואפים לאפס כי $\ln(n!)\to\infty$

נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum \frac{1}{\ln(n!)} \geq \sum \frac{1}{\ln(n^n)} = \sum \frac{1}{n\ln(n)}$$

כעת לפי עיבוי (מדובר הרי בסדרה מונוטונית יורדת)

$$\sum \frac{1}{n\ln(n)} \sim \sum 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum \frac{1}{n \cdot \ln(2)}$$

הוא מתבדר, לכן חברו מתבדר, ולכן טור הערכים המוחלטים מהשאלה מתבדר כי הוא גדול יותר.

כלומר הטור בשאלה אינו מתכנס בהחלט, כיוון ש $\frac{1}{\ln(n!)} \to 0$ מונוטונית יורדת, לפי לייבניץ הטור בשאלה מתכנס, וסה"כ מתכנס בתנאי.

שאלה 2 [עריכה]

א [עריכה]

תהי סדרה a_n כך שלכל $\epsilon > 0$ קיים N_ϵ כך שלכל $n > N_\epsilon$ מתקיים $0 < a_{n+1} - a_n < \epsilon$

הוכח/הפרך: a_n מתכנסת

הנתון אומר בשפה אחרת ש $a_{n+1} - a_n \to 0$

וזה בוודאי לא מבטיח שהסדרה תתכנס

$$a_n = \sqrt{n} \to \infty$$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

ב [עריכה]

חשב את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

רמז: $t=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

קצת נתקענו, נחליף בין המונה למכנה.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\left\{\frac{\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=\left\{\frac{0}{\infty}\right\}=0$$

שאלה 4 [עריכה]

תהי f פונקציה זוגית, הגזירה אינסוף פעמים

א [עריכה]

הוכח כי $f'(0) = 0$

ב [עריכה]

הוכח כי $f^{(2n+1)}(0) = 0$ לכל n

קצת הכנה

$$f(x) = f(-x)$$

נגזרת את שני הצדדים

$$f'(x) = f'(-x) \cdot (-1)$$

הנגזרת של זוגית היא אי זוגית, ובאופן דומה אפשר להוכיח שהנגזרת של אי זוגית היא זוגית

$$g(-x) = -g(x)$$

$$-g'(-x) = -g'(x)$$

$$g'(-x) = g'(x)$$

לכן באינדוקציה לכל n מתקיים כי הפונקציה $f^{(2n+1)}(x)$ היא פונקציה אי זוגית

ונוכיח שפונקציה אי זוגית שווה באפס לאפס.

אכן, אם g אי זוגית

$$g(0) = -g(-0)$$

$$2g(0) = 0$$

$$g(0) = 0$$

שאלה 5 [עריכה]

תהי f פונקציה גזירה בעלת נגזרת מונוטונית

א [עריכה]

הוכח/הפרך: אם f מונוטונית אזי $\forall x:f(x)\neq 0$

ב [עריכה]

הוכח/הפרך: אם $\forall x:f(x)\neq 0$ אזי f מונוטונית

סעיף א' הפרכה: $f(x)=0$ מונוטונית בעלת נגזרת מונוטונית וחותכת את הציר מלאנתלפים.

סעיף ב' הפרכה: $f(x)=x^2+1$ אכן אינה חותכת את הציר, היא אינה מונוטונית, והנגזרת $2x$ אכן מונוטונית.