תרגיל 5

2 במאי 2018

1. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקציה קבועה. הוכיחו שהיא רציפה.

2. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1\subseteq\tau_2$ ו $\sigma_2\subseteq\sigma_1$. הוכיחו כי

$$f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$$

היא גם רציפה. .

3. הוכיחו שכל פונקציה ממרחב דיסקרטי היא רציפה. כמו כן, כל פונקציה לתוך מרחב טריוויאלי רציפה.

4. תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ פונקציה. הוכיחו כי תמונה הפוכה של פתוחה היא פתוחה (שזה שקול לכך ש f רציפה) אמ"מ תמונה הפוכה של סגורה היא סגורה.

5. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A\subseteq X$. הוכיחו ש$f|_A:A\to Y$ רציפה.

6. נניח ש$X=\cup_{i\in I}O_i$ איחוד כלשהוא של קבוצות פתוחות. ונניח שיש $f_i:O_i\to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i,j\in I$ מתקיים $f_i|_{O_i\cap O_j}=f_j|_{O_i\cap O_j}$. אז הפונקציה $f:X\to Y$ שמוגדרת ע"י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x\in X$. אז x שייך לאיזשהו O_i ואז נגדיר $f(x)=f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f=\cup_{i\in I}f_i$).

7. נניח ש$X=C_1\cup...\cup C_n$ איחוד סופי של קבוצות סגורות. ונניח שיש $f_i:C_i\to Y$ פונקציות רציפות שמזדהות על החיתוך. כלומר, לכל $i,j\in I$ מתקיים $f_i|_{C_i\cap C_j}=f_j|_{C_i\cap C_j}$. אז הפונקציה $f:X\to Y$ שמוגדרת ע"י הפונקציות f_i רציפה (באופן הבא: יהי $x\in X$. אז x שייך לאיזשהו C_i ואז נגדיר $f(x)=f_i(x)$. שימו לב שהפונקציה מוגדרת היטב. באופן שקול ופורמלי אפשר להגדיר $f=\cup_{i\in I}f_i$).

8. (א) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z\subseteq Y\subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y שנסמנה τ_Y וזו משרה טופולוגית תת

מרחב על Z שנסמנה $(\tau_Y)_Z$. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z שנסמנה τ_Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו־סופית היא בעצמה טופולוגיה קו־סופית. כלומר יהא (X, τ) כאשר $\tau = \{O \in P(X) : |O^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ ויהא (A, τ_A) ת"מ טופלוגי אזי הוכיחו כי

$$\tau_A = \{O \in P(A) : |O^c| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

הדרכה: הוכיחו כי הקבוצות הסגורות לפי τ_A הן בדיוק תתי הקבוצות הסופיות של A איחוד A.