תרגול 12

שובך היונים

אם $kn+1$ יונים נכנסות ל n שובכים, אזי בהכרח יהיה שובך שבו יש לפחות $k+1$ יונים.

מקרה פרטי: אם $n+1$ יונים נכנסות ל- n שובכים, יהיה שובך עם לפחות 2 יונים.

[ניסוח פורמלי למתעניינים: תהינה A,B קבוצות סופיות. אם $|B|<|A|$ אזי אין פונקציה חח"ע $f:A\to B$.]

<u>תרגיל</u>: הוכח שבכל קבוצה של 6 מספרים שלמים יש 2 מספרים שהפרשם מתחלק ב 5 ללא שארית.
<u>פתרון</u>: קבוצת השאריות בחלוקה ב 5 היא $A=\{0,1,2,3,4\}$. תהי B קבוצה בת 6 מספרים שלמים.
לפי עקרון שובך היונים קיימים שני אברים ב B שיש להם אותה שארית בחלוקה ב 5.
אזי הפרשם מתחלק ב 5 ללא שארית.

<u>תרגיל</u>: הוכח שקיים מספר שמתחלק ב 359 שספרותיו הן 0 או 7.
<u>פתרון</u>: קבוצת השאריות בחלוקה ב 359 היא $A=\{0,1,\dots,358\}$.
נסתכל על הקבוצה $B=\{b_1,\dots,b_{360}\}$ כאשר $b_1=7, b_2=77, b_3=777, \dots$
לפי עקרון שובך היונים קיימים שני אברים $b_i,b_j\in B$ שיש להם אותה שארית בחלוקה ב 359.
אזי הפרשם b_i-b_j הוא מספר שמתחלק ב 359 ללא שארית, וספרותיו הן 0 או 7.

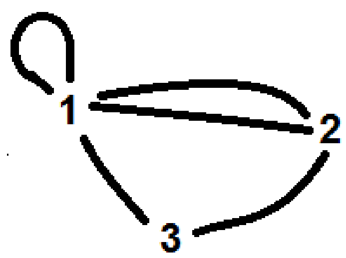
תורת הגרפים

הגדרות

<u>(מולטי) גרף</u> (לא מכוון) הוא זוג $G=(V,E)$ כאשר V קבוצה של קדקודים ו E מולטי קבוצה של צלעות= זוגות של איברים מהקבוצה V.

*מולטי קבוצה זה אוסף איברים ללא חשיבות לסדר כאשר מותר לאיברים להופיע כמה פעמים.

דוגמא: $V=\{1,2,3\}$ $\quad E=\{\{1,1\},\{1,2\},\{2,1\},\{2,3\},\{3,1\}\}$



גרף שבו אין צלעות חוזרות ואין לולאות (צלע מקדקוד לעצמו) נקרא גרף פשוט.

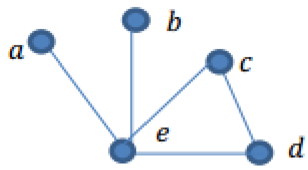
מסילה היא רצף של קדקודים $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k$ כך שבין כל 2 קודקודים עוקבים יש צלע.
כלומר ש $\forall i \ : \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

מסילה פשוטה אם אין בה חזרה על קדקודים (אין אף קדקוד שמופיע פעמיים)

מסילה סגורה (או: מעגל) הוא מסילה שבה הקדקוד הראשון הוא גם הקדקוד האחרון. $v_1 = v_k$

מסילה סגורה פשוטה היא מסילה שאין בה וקדקוד המופיע פעמיים פרט לקדקוד הראשון והאחרון.

דוגמה: (a, e, c, d, e, b) מסלול מ a ל b.
(a, e, b) מסלול פשוט מ a ל b.

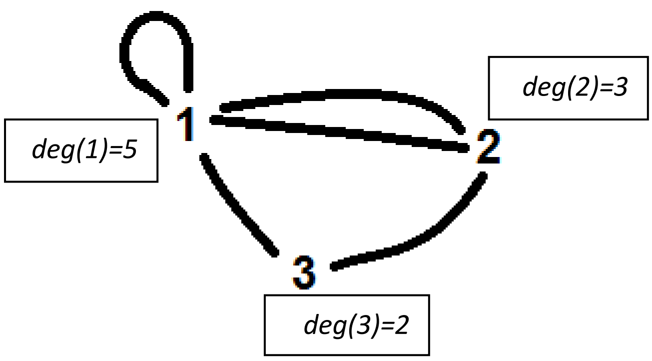


גרף נקרא קשיר אם בין כל 2 קדקודים יש מסילה.

דרגה של וקדקוד= מס' הצלעות בהם מופיע הקדקוד (לולאות נספרות פעמיים) מסמנים $\deg(v)$

לפעמים מכנים קדקודים המשותפים בצלע עם קדקוד v השכנים של v. בגרף פשוט הדרגה של קדקוד היא בעצם מספר השכנים שלו.

למשל:



משפט: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון סופי. אזי $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
הוכחה: כל צלע $(u, v) \in E$ מחברת בין שני קודקודים שונים, ולכן נספרת פעם ב $\deg(u)$ ופעם ב $\deg(v)$.