# פתרון בוחן 2ב בקורס מבוא לחוגים ומודולים
# 88-212 סמסטר ב׳ תשפ״א

**הוראות** כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת״ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: $90$ דקות. לאחר מכן יינתנו $15$ דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.
סך הנקודות עולה על $100$, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו $100$.
חומר עזר: אסור.

בהצלחה!

---

**שאלה 1.** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהי $F$ שדה. נתבונן בחוג $F(x)[y]$, שהוא חוג הפולינומים במשתנה $y$ מעל $F(x)$. אז $F(x)[y]$ נותרי.
(תזכורת: $F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0 \right\}$) (20 נקודות)

ב. יהי $M \neq \{0\}$ מודול ציקלי מעל חוג $R$. אז $M \cong R$ כמודולים מעל $R$. (20 נקודות)

פתרון.

א. הטענה נכונה. אכן, אנחנו יודעים ש-$F(x)$ הוא שדה (כי הוא שדה השברים של $F[x]$); לכן $F(x)[y]$ הוא חוג פולינומים מעל שדה. בפרט הוא תחום ראשי, ולכן נותרי. אפשר גם להשתמש במשפט הבסיס של הילברט.

ב. הטענה אינה נכונה. אפשר לקחת $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/212\mathbb{Z}$. $M$ ציקלי מעל $R$, כי הוא נוצר על ידי $1 + 212\mathbb{Z}$, אבל הוא לא איזומורפי ל-$R$ כי $R$ אינסופי ו-$M$ סופי.

**שאלה 2.**

א. מצאו את הפירוק של הפולינום $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14$ למכפלה של פולינומים אי-פריקים מעל $\mathbb{Z}$, והוכיחו שכל הגורמים שמצאתם אי-פריקים.
(20 נקודות)

ב. עובדה (אין צורך להוכיח): החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ הוא תחום אוקלידי ביחס לפונקציית הנורמה $N(a + b\sqrt{-2}) = (a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$.
הוכיחו שהפולינום $g(x) = x^4 + (1 - 7\sqrt{-2})x - 11$ הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
(20 נקודות)

פתרון.

א. מפירוק טרינומים אפשר לראות כי $f(x) = (x^2-2)(x^2-7)$. הגורם הראשון אי-פריק לפי אייזנשטיין עם $p=2$, והשני לפי אייזנשטיין עם $p=7$. לחילופין, כיוון שהם פרימיטיביים, הם אי-פריקים מעל $\mathbb{Z}$ אם ורק אם הם אי-פריקים מעל $\mathbb{Q}$, וכיוון ש-$\mathbb{Q}$ שדה ואלו פולינומים ממעלה 2 מספיק לבדוק שאין להם שורשים.

ב. פה לא מספיק לוודא שאין שורש, כי אולי יש שני גורמים ריבועיים. נרצה להשתמש בקריטריון אייזנשטיין. לצורך כך, נפרק את 11. נחפש איבר $\alpha+\beta\sqrt{-2}$ שהנורמה שלו היא 11:

$$11 = N(\alpha+\beta\sqrt{-2}) = \alpha^2+2\beta^2.$$

אפשר לשים לב שהפתרונות היחידים הם $\alpha=\pm 3$ ו-$\beta=\pm 1$, ומקבלים את הפירוק

$$11 = (3+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-2}).$$

מדוע הגורמים החדשים שקיבלנו ראשוניים? הנורמה של כל אחד מהם היא 11. אילו היה אפשר לכתוב $xy = 3\pm\sqrt{-2}$, אז $N(x)N(y) = 11$. אבל 11 ראשוני, לכן $N(x)=1$ או $N(y)=1$. אבל כיוון ש-$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ הוא אוקלידי ביחס לפונקציית הנורמה הזו, כל איבר מנורמה 1 הוא הפיך. זה מראה שהאיברים אי-פריקים, אבל כיוון שמדובר בתחום אוקלידי הם גם ראשוניים.

עכשיו כשאנחנו יודעים את זה, נוודא שאחד מהם מחלק את הגורם של $x$. אכן,

$$\frac{1-7\sqrt{-2}}{3+\sqrt{-2}} = \frac{1-7\sqrt{-2}}{3+\sqrt{-2}}\cdot\frac{3-\sqrt{-2}}{3-\sqrt{-2}} = \frac{-11-22\sqrt{-2}}{11} = -1-2\sqrt{-2}.$$

אם כך, התנאים של קריטריון אייזנשטיין מתקיימים עבור $p = 3+\sqrt{-2}$:

- $p$ ראשוני;
- המקדם המוביל (1) אינו מתחלק ב-$p$;
- כל מקדם אחר מתחלק ב-$p$;
- המקדם החופשי (11) אינו מתחלק ב-$p^2$ (כי יש לנו את הפירוק שלו לראשוניים).

לכן הפולינום אכן אי-פריק.

**שאלה 3.** תזכורת: מודול $M$ מעל חוג $R$ נקרא פשוט, אם אין לו תת-מודולים לא טריוויאליים (כלומר, תת-המודולים היחידים שלו הם $\{0\}$ ו-$M$).

נניח ש-$M\neq\{0\}$ מודול פשוט מעל חוג $R$. הוכיחו שכל הומומורפיזם של מודולים $\varphi: M\to M$ שאינו הומומורפיזם האפס הוא איזומורפיזם.

(30 נקודות)

פתרון. יהי $\varphi: M\to M$ שאינו הומומורפיזם האפס. נזכור מההרצאה כי $\ker\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ הם תת-מודולים של $M$.

עבור הגרעין, $\varphi\neq 0$, ולכן $\ker\varphi\neq M$. כיוון ש-$M$ פשוט, זה משאיר רק את האפשרות $\ker\varphi=\{0\}$, כלומר $\varphi$ חח"ע.

עבור התמונה, $\varphi\neq 0$, ולכן $\operatorname{Im}\varphi\neq\{0\}$. כיוון ש-$M$ פשוט, זה משאיר רק את האפשרות $\operatorname{Im}\varphi=M$, כלומר $\varphi$ על.

בסך הכל, $\varphi$ חח"ע ועל, לכן איזומורפיזם, כנדרש.