פתרון בוחן בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף, מועד א'

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 80 דקות.
חומר עזר: מחשבון רגיל בלבד (וגם אותו לא צריך).

שאלה 1. תהי $\sigma = (238)(384)(253)(1684)(2354) \in S_8$.

א. מצאו את σ^4 ואת σ^{-1}.

ב. מצאו את כל איברי $\langle\sigma\rangle$.

פתרון.

א. כפי שראינו בכיתה, לכל תמורה יש ייצוג כמכפלת מחזורים זרים. מבלי שכתבנו כאן בפירוט מלא, חישוב זריז יגלה כי

$$\sigma = (1645)(23)$$

ומי שבטעות הרכיב תמורות בכיוון ההפוך קיבל את (16843). מבנה המחזורים של σ הוא $(4,2)$ ולכן הסדר שלה הוא $o(\sigma) = [4,2] = 4$. בפרט, מתקיים כי $\sigma^4 = \mathrm{id}$. בנוסף, קל לגלות כי $\sigma^{-1} = (1546)(23)$, ואפשר לוודא שאכן $\sigma^{-1} = \sigma^3$.

ב. בסעיף הקודם גילינו כי $o(\sigma) = 4$. לכן ב-$\langle\sigma\rangle$ יש בדיוק ארבעה איברים שכבר מצאנו חלק מהם:

$$\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{\mathrm{id}, (1645)(23), (14)(56), (1546)(23)\}$$

שאלה 2. התשובה בכל סעיף צריכה להתחיל במילה "הוכחה" או במילה "הפרכה".

א. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $f : D_{12} \to S_4$.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{30} \to S_{10}$.

פתרון.

א. הפרכה. שתי החבורות האלו הן סופיות ומסדר 24. לכן אם יש אפימורפיזם בינהן, אז מדובר באיזומורפיזם. אבל החבורות האלו לא איזומורפיות, למשל כי ב-D_{12} יש את האיבר σ מסדר 12 ואילו ב-S_4 הסדר של כל האיברים הוא לכל היותר 4.

ב. הוכחה. החבורה $\mathbb{Z}_{30}$ ציקלית מסדר 30. לכן אם יש מונומורפיזם f, התמונה שלו $\operatorname{im} f$ היא גם ציקלית ומסדר 30, ונקבעת לחלוטין לפי התמונה של 1. נסמן $\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10)$ שהוא איבר מסדר $[2,3,5] = 30$ ב-S_{10}. נשלח את 1 ל-σ, כלומר המונומורפיזם שבחרנו הוא $f(i) = \sigma^i$.
בפירוט, תחילה נבדוק כי f הומומורפיזם. לכל $i, j \in \mathbb{Z}_{30}$ מתקיים

$$f(i+j) = \sigma^{i+j} = \sigma^i \sigma^j = f(i)f(j)$$

להוכחת חח"ע, נניח $f(i) = \sigma^i = \mathrm{id}$. אז נסיק $30|i$ כי $o(\sigma) = 30$ לפי תרגיל מהכיתה. לכן $i \equiv 0 \pmod{30}$ שהוא איבר היחידה של $\mathbb{Z}_{30}$.

שאלה 3. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה A, ונסמן את חיתוך כל המייצבים

$$H = \bigcap_{a \in A} G_a = \{g \in G \mid \forall a \in A : g * a = a\}$$

הוכיחו $H \lhd G$. כלומר יש להוכיח ש-H היא תת־חבורה וגם שהיא נורמלית.

פתרון. רבים הוכיחו כי H תת־חבורה כמעט לפי הגדרה. כלומר הראו שהיא לא ריקה (קל להוכיח $e \in H$), ולכל $h, h' \in H$ מתקיים כי $hh' \in H$ וגם $h^{-1} \in H$. בדרך אחרת, נזכר כי כל מייצב G_a הוא תת־חבורה, וראינו שחיתוך של תת־חבורות הוא תת־חבורה. לכן $H \leq G$. בשביל הנורמליות, נראה סגירות להצמדה. יהי $g \in G$ ו-$h \in H$. צריך להראות כי $ghg^{-1} \in H$. נראה שהאיבר ghg^{-1} מייצב את כל אחד מאיברי $a \in A$:

$$(ghg^{-1}) * a = g * (h * (g^{-1} * a)) = g * (g^{-1} * a) = (gg^{-1}) * a = e * a = a$$

כאשר השיוויון הראשון הוא מההגדרה של פעולה. השיוויון השני מסתמך על זה ש-$g^{-1} * a \in A$ ומפני ש-h מייצב כל איבר של A, אז הוא בפרט מייצב את $g^{-1} * a$. השיוויון השלישי הוא מההגדרה של פעולה. השיוויון הרביעי הוא פשוט כפל של איבר בהופכי. השיוויון החמישי הוא מההגדרה של פעולה. לכן $H \lhd G$.

גישה אחרת לפתרון: כל פעולה היא למעשה הומומורפיזם $\varphi \colon G \to S_A$. הגרעין של φ הוא כל האיברים של G שעוברים לאיבר היחידה של S_A, שהוא id_A. לכן $\ker \varphi = H$, וכל גרעין הוא תת־חבורה נורמלית. בפירוט, כל איבר של H מייצב את כל אחד מאיברי A, ולכן נשלח ל-id_A. מצד שני, כל איבר שמייצב את כל איברי A, שייך לכל אחד מן המייצבים G_a, ולכן שייך לחיתוך של המייצבים שהוא H.

בהצלחה!