אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 2

להגשה עד 20.11.19

שאלה 1

לכל אוסף קבעו האם הוא אלגברה והאם הוא σ-אלגברה:

1. $S=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3,4\}\}\,, X=\{1,2,3,4\}$
2. $S=\{\emptyset\}\cup\left\{A:[0,\frac{1}{2}]\subseteq A\right\}, X=[0,1]$
3. $S=\{A:\{0,1\}\subseteq A\, or\, A\cap\{0,1\}=\emptyset\}\,, X=[0,1]$
4. $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ו- $A\in S$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A$ מתקיים:
   $\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}:y_1=x_1\}\subseteq A$

שאלה 2

תהי $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$. הוכיחו כי הקבוצה

$$A=\{x:f_n(x)\longrightarrow 0\}$$

מדידה לבג.

רשות: הוכיחו כי A מדידה בורל, כאשר σ-אלגברת בורל היא ה σ-אלגברה המינימלית המכילה את אוסף הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{R}$.

שאלה 3

תהי m מידת לבג ו- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות ב-$[0,1]$. נגדיר $F=\{x|\,\forall n\in\mathbb{N}\,\exists k>n:x\in A_k\}$.
הוכיחו:

1. $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$
2. אם $m(A)>\delta>0$ לכל n אז $m(F)>\delta$.
3. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(F)=0$.
4. קיימת סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש-$\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ ו- $m(F)=0$.

שאלה 4

הגדרנו בתרגול את קבוצת קנטור C. הוכיחו כי קבוצת קנטור היא:

1. קומפקטית.
2. לא מכילה אף קטע בעל מידה חיובית.
3. אינה איחוד בן מניה של קטעים סגורים.

שאלה 5

תהי X קבוצה, ו־$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ אוסף תת־קבוצות שלה. הראו כי לכל $F \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת־מניה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש־$F \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה: הראו כי קבוצת הקבוצות ב־$\sigma(\mathbb{A})$ המקיימות תכונה זו היא σ־אלגברה. לאחר מכן הראו כי הקבוצות ב־$\mathbb{A}$ מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.