אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 1

29 באוקטובר 2019

הגדרה: תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. נגדיר את המידה החיצונית של E להיות

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

כאשר I_n הם קטעים פתוחים ו־$|I_n|$ הוא האורך של I_n. כלומר, המידה החיצונית של קבוצה היא החסם התחתון של סכום אורכי כיסוי פתוח של הקבוצה. שימו לב שהמידה החיצונית מוגדרת על כל הקבוצות.

תכונות של מידה חיצונית:

1. $m^*(\emptyset) = 0$, וכן עבור נקודון $x \in \mathbb{R}$, $m^*(\{x\}) = 0$.
2. מונוטוניות: אם $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ אז $m^*(A) \leq m^*(B)$, כי כל כיסוי פתוח של B הוא גם כיסוי פתוח של A.
3. σ־תת־אדיטיביות: $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

תרגיל: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. אז $m^*(I) = |I|$.

הוכחה: נחלק למקרים. אם $I = [a, b]$ הוא קטע סגור וחסום, לכל $\varepsilon > 0$ הקטע $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ הוא כיסוי פתוח של I, ולכן $m^*(I) \leq |b + \varepsilon - (a - \varepsilon)| = b - a + 2\varepsilon$. זה נכון לכל $\varepsilon > 0$, אז $m^*(I) \leq b - a$. נותר להוכיח את הצד השני של אי השוויון. כדי לעשות זאת יש להראות שסכום האורכים של כל כיסוי פתוח של I הוא לפחות $b - a$. למעשה, לפי משפט היינה־בורל I קומפקטי, ולכן לכל כיסוי פתוח שלו יש תת־כיסוי־סופי, ומספיק לנו להוכיח את אי השוויון עבור כל כיסוי סופי של I. כעת, יהי $\{I_n\}$ כיסוי פתוח סופי של I. בלי הגבלת הכלליות נוכל לבחור קטע $I_1 = (a_1, b_1)$ כך שמתקיים $a \in I_1$. אם $b_1 \leq b \notin I_1$, בהכרח יש קטע $I_2 = (a_2, b_2)$ המכיל את b_1, וכך הלאה עד קטע $I_k = (a_k, b_k)$ המכיל את b. נשים לב שהבחירה חייבת לעצור, כי הכיסוי סופי. נחשב את סכום אורכי הקטעים בכיסוי ונקבל

$$\sum |I_n| \geq \sum_{i=1}^{k} |I_i| = (b_k - a_k) + ... + (b_1 - a_1) = b_k - (a_k - b_{k-1}) - ... - a_1 > b_k - a_1 > b - a$$

סך הכל $m^*(I) = b - a$. אם I הוא קטע חסום אך לא סגור, לכל $\varepsilon > 0$ קיים קטע סגור וחסום $J \subset I$ כך ש־$|J| > |I| - \varepsilon$. ממונוטוניות המידה החיצונית, נקבל כי

$|I|=|\bar{I}|=m^*(\bar{I})\leq m^*(I)\leq m^*(J)=|J|<|I|-\varepsilon$ (נזכיר כי $\bar{I}$ הוא הסגור של I).
זה נכון לכל $\varepsilon>0$ ולכן $m^*(I)=|I|$.

אם I הוא קטע אינסופי, אז לכל $x\in\mathbb{R}$ יש קטע חסום וסגור $J\subset I$ שאורכו x. כעת לכל x מתקיים $m^*(I)\geq m^*(J)=|J|=x$ ולכן $m^*(I)=\infty$.

תרגיל: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה. נסמן $E+c=\{e+c|e\in E\}$. הוכיחו כי $m^*(E+c)=m^*(E)$.

הוכחה: יהי $\{I_n\}$ כיסוי פתוח של E. אז $\{I_n+c\}$ הוא כיסוי פתוח של $E+c$. לכן $m^*(E+c)\leq\sum_{n=1}^{\infty}|I_n+c|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$. זה נכון לכל כיסוי פתוח של E, ולכן $m^*(E+c)\leq m^*(E)$. הצד השני דומה, כי אם $\{J_n\}$ כיסוי פתוח של $E+c$ אז $\{J_n-c\}$ כיסוי פתוח של E, ונקבל את אי השוויון ההפוך. סך הכל $m^*(E+c)=m^*(E)$.

תרגיל: הוכיחו כי אם $m^*(A)=0$ אז לכל B, $m^*(A\cup B)=m^*(B)$.

הוכחה: מצד אחד $B\subseteq A\cup B$ ולכן ממונוטוניות המידה החיצונית $m^*(B)\leq m^*(A\cup B)$. מצד שני, בגלל תת־האדיטיביות $m^*(A\cup B)\leq m^*(A)+m^*(B)$, ובפרט $m^*(A\cup B)\leq m^*(B)$.

תרגיל: תהי $A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1]$ קבוצת האי־רציונלים בקטע $[0,1]$. הוכיחו כי $m^*(A)=1$.

הוכחה: יהי $x\in\mathbb{R}$, אז לכל $\varepsilon>0$ הקטע $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ הוא כיסוי פתוח של $\{x\}$ שאורכו 2ε. לכן $m^*(\{x\})\leq 2\varepsilon$. זה נכון לכל $\varepsilon>0$ ולכן $m^*(\{x\})=0$. נסמן $B=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, הרציונלים בקטע $[0,1]$. B היא קבוצה בת־מניה ולכן $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$. כעת מ־$\sigma$־תת־אדיטיביות של המידה החיצונית, $m^*(B)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\{x_i\}=\sum_{i=1}^{\infty}0=0$, ולכן $m^*(B)=0$. מהתרגיל הקודם נקבל $m^*(A)=m^*(A\cup B)=m^*([0,1])=1$.

תרגיל: תהי $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ קבוצת הרציונלים ב־$[0,1]$, ויהי $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ כיסוי פתוח סופי של A. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}|I_k|\geq 1$.

הוכחה:

$$1=m^*([0,1])=m^*(\bar{A})\leq m^*(\overline{\bigcup I_k})=m^*(\bigcup\overline{I_k})\leq\sum m^*(\overline{I_k})=\sum_{k=1}^{n}|I_k|$$

הערה: שימו לב שהשוויון $\overline{\bigcup I_k}=\bigcup\overline{I_k}$ נכון כי הכיסוי סופי. במקרה האינסופי השוויון לא בהכרח מתקיים. ניקח למשל את הקטעים $I_k=\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)$. אז $\overline{\bigcup I_k}=\overline{\bigcup\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)}=\overline{(0,1)}=[0,1]$. מצד שני $\bigcup\overline{I_k}=\bigcup\overline{\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)}=\bigcup\left[\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right]=(0,1)$.

תרגיל: הוכיחו כי כל קבוצה פתוחה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא איחוד בן־מניה של קטעים זרים פתוחים ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה: לכל $x \in G$, יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב־$\mathbb{R}$ המקיים $x \in I_x \subseteq G$. יהיו $x, y \in G$. אם $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, אז $I_x \cup I_y$ הוא קטע פתוח המקיים $x, y \in I_x \cup I_y \subseteq G$, ולכן לפי הגדרת I_x, I_y נקבל $I_x = I_x \cup I_y = I_y$. כלומר I_x ו־I_y הם שווים או זרים. לכן G היא איחוד זר של קטעים פתוחים ב־$\mathbb{R}$, ונוכל לכתוב $G = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$. נראה כי $\mathcal{C}$ הוא אוסף בן־מניה. נשים לב כי כל $I \in \mathcal{C}$ מכיל מספר רציונלי q_I, מצפיפות הרציונלים בממשיים. נבנה העתקה $\varphi : \mathcal{C} \to \{q_I | I \in \mathcal{C}\}$ לפי $\varphi(I) = q_I$. כלומר לכל $I \in \mathcal{C}$ נתאים את הרציונלי שבחרנו ממנו. זו העתקה חח"ע ועל, והתמונה היא בת־מניה. לכן $\mathcal{C}$ בת־מניה.