הוכחה מוחשית של משפט עזר של רימאן לפונקציות רציפות

משפט עזר של רימאן

תהי $f(x)$ היא פונקציה רציפה שמוגדרת בקטע סופי $[a,b]$, אז מתקיימים שוויונים הבאים

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx=\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx=0 \qquad (1)$$

הוכחה

תהי ε הוא מספר שנתון וקטן כרצוננו ו $\delta(\varepsilon)=\delta$ הוא גם כן מספר חיובי כך שלפי משפט קנטור לפונ' רציפות במידה שווה מתקיים אי-שוויון:

$$(2) \quad |f(t_2)-f(t_1)|\le\varepsilon \quad \text{עבור} \quad |t_2-t_1|<\delta$$

כאן $t_2,t_1\in[a,b]$ והם מספרים שרירותיים.

נקבע מספר h: $h\in(0,\delta]$ ופונקציית סטקלוב:

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt,\quad x\in[a_1,b_1] \qquad (3)$$

וכאן $[a_1,b_1]=[a-h,b+h]$.

קל לראות שמתקיים אי-שוויון:

$$\left|\int_a^b f(t)\cos pt\,dt-\int_{a_1}^{b_1}f_h(t)\cos pt\,dt\right|=$$

$$=\left|\left(\int_a^b f(t)\cos pt\,dt-\int_{a_1}^{b_1}f(t)\cos pt\,dt\right)+\left(\int_{a_1}^{b_1}f(t)\cos pt\,dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{a_1}^{b_1}f_h(t)\cos pt\,dt\right)\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^b f(t)\cos pt\,dt-\int_{a_1}^{b_1}f(t)\cos pt\,dt\right|+\left|\int_{a_1}^{b_1}\bigl(f(t)-f_h(t)\bigr)\cos pt\,dt\right| \qquad (4)$$

נאמוד את המחוברים מצד ימין של (4):

$$\left| \int_a^b f(t)\cos pt\,dt - \int_{a_1}^{b} f(t)\cos pt\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^{a+h} f(t)\cos pt\,dt + \int_{b-h}^{b} f(t)\cos pt\,dt \right| \le$$

$$\le \int_a^{a+h} |f(t)|\,dt + \int_{b-h}^{b} |f(t)|\,dt \le \|f\|_{C[a,b]}\cdot h + \|f\|_{C[a,b]}\cdot h =$$

$$= 2h\,\|f\|_{C[a,b]} \le \varepsilon \qquad (5)$$

כאן $\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$ כי פונקציה

$f(x)$ היא רציפה וקטע $[a,b]$ הוא סופי. בגלל

אי-שוויון אחרון ב-(5) נכון כי $h\in(0,\delta]$ וניתן

להקטין מספר $\delta>0$ אם יש צורך בכך.

נמשיך:

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} f(t)\cos pt\,dt - \int_{a_1}^{b_1} f_h(t)\cos pt\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{a_1}^{b_1} \big(f(t) - f_h(t)\big)\cos pt\,dt \right| =$$

$$= \sup_{t\in[a_1,b_1]} |f(t) - f_h(t)|\cdot(b_1 - a_1) =$$

$$= (b_1 - a_1) \sup_{t\in[a_1,b_1]} \left| f(t) - \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} f(\xi)\,d\xi \right| =$$

$$= (b_1 - a_1) \sup_{t\in[a_1,b_1]} \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} \big(f(t) - f(\xi)\big)\,d\xi \right|$$

$$\leq (b_1-a_1) \sup_{t\in[a_1,b_1]} \int_{t-h}^{t+h} |f(t)-f(\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq \left| \begin{array}{c} \text{כאן השתמשנו} \\ \text{ב- (2)} \end{array} \right| \leq (b_1-a_1)\varepsilon$$

נקבע שלילות $b_1-a_1=1$ ב. אם נקבע סופו של דבר:

$$\left| \int_a^b f(x)\cos px\,dx - \int_{a_1}^{b_1} f_h(x)\cos px\,dx \right| \leq 2\varepsilon \qquad (6)$$

לכן אנו צריכים שמתקיים שוויון:

$$\lim_{p\to\infty} \int_{a_1}^{b_1} f_h(x)\cos px\,dx = 0 \qquad (7)$$

אם נסיים את ההוכחה. נשים לב ש:

$$|f_h(t)| \leq \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} |f(\xi)|d\xi \leq \|f\|_{C[a,b]} \qquad (8)$$

$$f_h'(t) = \frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h} \Rightarrow$$

$$|f_h'(t)| \leq \frac{1}{2h}\|f\|_{C[a,b]} \qquad (9)$$

מכאן נעבור בקצרות:

$$\int_{a_1}^{b_1} f_h(x)\cos px\,dx = \frac{1}{p}\int_{a_1}^{b_1} f_h(x)\,d\sin px =$$

$$= \frac{1}{p} f_h(x)\sin px\Big|_{a_1}^{b_1} - \frac{1}{p}\int_{a_1}^{b_1} f_h'(x)\sin px\,dx \Rightarrow$$

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} f_h(x)\cos px\,dx \right| \leq \frac{\|f\|_{C[a,b]}}{p} + \frac{1}{p}\|f\|_{C[a,b]}\cdot\frac{1}{2h} \to 0$$

כאשר $p\to\infty$ וקבלנו מבוקשים ∎