# אינפי 4 - תרגול 6

17 באוגוסט 2011

### תזכורת מתרגול קודם - סעיף 4 של המשפט

$F\in C^{1}$ בתחום $V$ פשוט קשר, אז סעיפים 1-3 שקולים בתלת מימד ל:

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$$

ובדו מימד ל:

$$Q_{x}-P_{y}\equiv0$$

## תרגיל

$$F\left(x,\,y\right)=\left(2xe^{xy}+x^{2}ye^{xy}\right)\hat{i}+\left(x^{3}e^{xy}+2y\right)\hat{j}$$

בדוק האם $F$ משמר. אם כן, מצא פוטנציאל.

### פתרון

$$D=\mathbb{R}^{2}$$

זהו תחום פשוט קשר לכן נבדוק לפי סעיף 4.

$$\begin{aligned}
Q_{x} & = 3x^{2}e^{xy}+x^{3}ye^{xy}\\
P_{y} & = 2x^{2}e^{xy}+x^{2}e^{xy}+x^{3}ye^{xy}\\
 & = 3x^{2}e^{xy}+x^{3}ye^{xy}
\end{aligned}$$

לכן

$$Q_{x}-P_{y}\equiv0$$

לכן השדה משמר. נמצא פוטנציאל.

$$\begin{aligned}
f & = \int x^{3}e^{xy}+2ydy\\
 & = x^{2}e^{xy}+y^{2}+c\left(x\right)\\
f_{x} & = 2xe^{xy}+x^{2}ye^{xy}+c^{'}\left(x\right)=P\\
2xe^{xy}+x^{2}ye^{xy} & = 2xe^{xy}+x^{2}ye^{xy}+c^{'}\left(x\right)\\
c^{'}\left(x\right) & = 0\\
c\left(x\right) & = c
\end{aligned}$$

לכן הפוטנציאל הוא:

$$f\left(x,\,y\right)=x^{2}e^{xy}+y^{2}+c$$

# תרגיל

$$\begin{aligned}
D & = \mathbb{R}^{2}\backslash\left\{ \left(1,\,1\right),\,\left(-1,\,-1\right)\right\} \\
P\left(x,\,y\right) & = \frac{y-1}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}+\frac{x+1}{\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}}\\
Q\left(x,\,y\right) & = \frac{1-x}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}+\frac{y+1}{\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}}\\
F & = \left(P,\,Q\right)
\end{aligned}$$

יש לחשב את:

$$\int_{\gamma}Pdx+Qdy$$

כאשר $\gamma$ הוא המעגל:

$$x^{2}+y^{2}=100$$

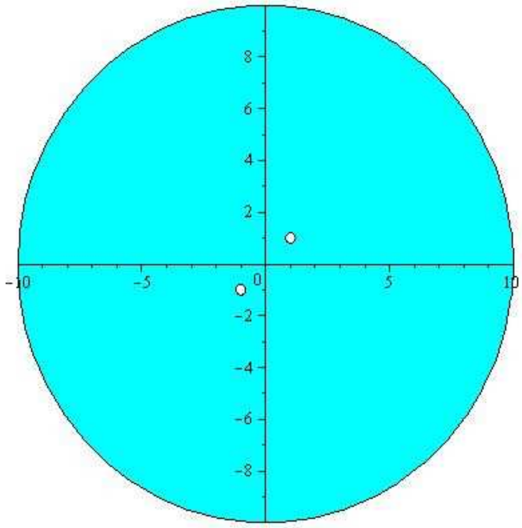
($\gamma$ בכיוון חיובי, $\gamma$ מקיף את הראשית פעם אחת).
נסמן:

$$\begin{aligned}
P_{1} & = \frac{y-1}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}\\
P_{2} & = \frac{x+1}{\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}}\\
Q_{1} & = \frac{1-x}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}\\
Q_{2} & = \frac{y+1}{\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}}\\
F_{1} & = \left(P_{1},\,Q_{1}\right)\\
F_{2} & = \left(P_{2},\,Q_{2}\right)
\end{aligned}$$

נחשב:

$$\begin{aligned}
P_{y} & = \frac{1}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}-\frac{\left(2y-2\right)\left(y-1\right)}{\left(\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}\right)^{2}}-\frac{\left(2y+2\right)\left(x+1\right)}{\left(\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}\right)^{2}}\\
Q_{x} & = -\frac{1}{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}}+\frac{\left(2x-2\right)\left(x-1\right)}{\left(\left(x-1\right)^{2}+\left(y-1\right)^{2}\right)^{2}}-\frac{\left(2y+2\right)\left(x+1\right)}{\left(\left(x+1\right)^{2}+\left(y+1\right)^{2}\right)^{2}}\\
Q_{x}-P_{y} & = 0
\end{aligned}$$

נסתכל על התחום:




קיבלנו שבתחום זה מתקיים

$$P_y - Q_x = 0$$

נסמן את התחום הזה ב$A$ ושפתו ב$\partial A$, אזי $\partial A = \gamma \cup C_1 \cup C_2$ כאשר $C_1$ ו$C_2$ המעגלים הקטנים סביב הנק' $(1, 1)$ ו$(-1, -1)$.
לכן, לפי משפט גרין:

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy = \iint_A Q_x - P_y dA = 0$$

לכן (כיוון שאנחנו לוקחים את $C_1, C_2$ בכיוון החיובי, והתחום מימין למסילה)

$$\int_{\partial A} = \int_\gamma - \int_{C_1} - \int_{C_2}$$

לכן

$$\int_\gamma = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

$C_1,\, C_2$ הן מעגלים ברדיוס $\epsilon$ קטן כרצוננו. כיוון ש$F_2$ שדה משמר:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} Pdx+Qdy &= \int_{C_1} P_1dx+Q_1dy+\int_{C_1} P_2dx+Q_2dy \\
&= \int_{C_1} P_1dx+Q_1dy+0 \\
&= \int\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2=\epsilon^2} \frac{(y-1)\,dx+(1-x)\,dy}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \int\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2=\epsilon^2} \frac{(y-1)\,dx+(1-x)\,dy}{\epsilon^2} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\int\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2=\epsilon^2} (y-1)\,dx+(1-x)\,dy \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le\epsilon^2} (-1-1)\,dxdy=-2\pi
\end{aligned}$$

מתקיים גם:

$$\int_{C_2} P+Q = \int_{C_2} P_1+Q_1+\int_{C_2} P_2+Q_2=0$$

אז קיבלנו:

$$\int_{\gamma}=-2\pi$$

# תרגיל

$$D=\left\{(x,\,y)\ \mid \begin{array}{l}(x-2)^2+y^2\ge 1\\ (x+2)^2+y^2\ge 1\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{y}{(x-2)^2+y^2}-\frac{y}{(x+2)^2+y^2} \\
Q &= \frac{2-x}{(x-2)^2+y^2}+\frac{x-2}{(x+2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

1. הראו כי בחלק העליון של $D$ (מעל $y=0$) ניתן להגדיר פוטנציאל.
2. חשב $\int_\gamma Pdx+Qdy$ כאשר $\gamma$ מסילה כלשהי סביב המעגל $(x-2)^2+y^2=1$.
3. הוכח כי $(P,\,Q)$ אינו משמר ב$D$.
4. האם $(P,\,Q)$ משמר בתחום:

$$\left\{(x,\,y)\ \mid x^2+y^2\ge 25\right\}$$

## פתרון

1. כמו בתרגיל הקודם, נחלק:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{y}{(x-2)^2+y^2} \\ P_2 &= -\frac{y}{(x+2)^2+y^2} \\ Q_1 &= \frac{2-x}{(x-2)^2+y^2} \\ Q_2 &= \frac{x-2}{(x+2)^2+y^2} \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} f_1 &= \int P_1 dx = \int \frac{y}{(x-2)^2+y^2} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x-2}{y}\right)^2} dx = \arctan\left(\frac{x-2}{y}\right) + h(y) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= Q_1 \\ h'(y) &= 0 \\ h(y) &= c \end{aligned}$$

לכן

$$f_1 = \arctan\left(\frac{x-2}{y}\right) + c$$

נבחר $c=0$ במקרה זה, לכן

$$f_1 = \arctan\left(\frac{x-2}{y}\right)$$

אם היינו עושים את זה דרך $Q$ היינו מקבלים:

$$f_1 = \int Q_1 dy = -\arctan\left(\frac{y}{x-2}\right)$$

נחשב את החלק השני של הפוטנציאל:

$$\begin{aligned} f_2 &= \int P_2 dx = -\arctan\left(\frac{x+2}{y}\right) \\ f_2 &= \int Q_2 dy = \arctan\left(\frac{y}{x+2}\right) \end{aligned}$$

התבקשנו למצוא פוטנציאל בחצי העליון של $D$, כלומר $y > 0$, לכן אנו יודעים ש$y \neq 0$ ונבחר את הפוטנציאלים שאין לנו בעיה עם תחום ההגדרה שלהם:

$$\begin{aligned} f_1 &= \arctan\left(\frac{x-2}{y}\right) \\ f_2 &= -\arctan\left(\frac{x+2}{y}\right) \\ f &= \arctan\left(\frac{x-2}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x+2}{y}\right) \end{aligned}$$

2. נקבל ש

$$\int_\gamma = \int_{(x-2)^2+y^2=1}$$

ואת זה אנו יכולים לחשב.
את הסעיפים הבאים גרישה יעלה לאתר.