פתרון בוחן סמסטר קיץ תשע"ו

1. (א) נדרג את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} R_2 = R_2 - R_1, \\ R_3 = R_3 - 2R_1, \\ \frac{-1}{2}R_2, \\ R_3 = R_3 - kR_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3+k}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(k-2)(k+5)}{2} & 2-k \end{array}\right)$$

יש לבדוק את הערכים $k = 2, -5$.

אם $k = 2$ אז נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ שזו צורה מדורגת. אין שורת אפסים ויש משתנה חופשי (השלישי) ולכן יש אינסוף פתרונות.

אם $k = -5$ אז נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$ יש שורת סתירה ולכן אין פתרונות למעריכת.

אם $k \neq 2, -5$ אז אין שורת סתירה ואין משתנים חופשיים ולכן יש פתרון יחיד.

(ב) בעצם צריך לפתור את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$ שזו בדיוק המערכת הקודמת כאשר $k = 0$.

לפי הדירוג שכבר עשינו נקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$ ולכן הפיתרון הוא $\begin{pmatrix} \frac{-9}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$,

ולכן הצירוף הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{2}{5} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{2}{5} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{-9}{5} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(ג) ידוע ש $span(A \cup B) = spanA + spanB$, ולכן $span\,(W \cup S) = spanW + spanS$.

בנוסף ידוע כי עבור תת־מרחב W מתקיים $spanW = W$ ולכן $span(W \cup S) = W + spanS$.

2. (א) לאחר דירוג נקבל את הצורה הקנונית $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

מכיוון שיש למערכת יותר מפתרון יחיד, המטריצה אינה הפיכה. [או: מהדירוג רואים שורת אפסים].

כדי לבנות טריצה B כך ש$AB = 0$ צריך שעמודות B יהיו פתרונות ל$Ax = 0$.

אפשר למשל לקחת את $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ב) נמיר את המרחב השמאלי לצורה של אוסף פתרונות של מערכת הומוגנית:
לשם כך נבדוק את האילוצים

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x+2y+z \end{array}\right)$$

נקבל שהמרחב הוא $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x+2y+z=0 \right\}$.

כעת נוכל לחשב את החיתוך הוא הפתרונות של סך המשוואות
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$, ואת זה כבר חישבנו בסעיף א'.

בסיס הוא $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ והמימד הוא 1.

3. (א) אפשר להראות ע"י הקריטריון המקוצר.
אפשר גם לראות ש $W = \{v \mid (A-I)v = 0\}$ וש $U = \{v \mid (A+I)v = 0\}$
וכך רואים שהם פתרונות של מערכות הומוגניות ולכן תת־מרחבים.

(ב) יש להראות שהחיתוך הוא אפס וגם ש$U + W = V = \left\{v \mid (A^2 - I)v = 0\right\}$
ע"י הכלה דו־כיוונית.

<u>החיתוך</u>: נניח $v \in W \cap U$ אזי $Av = v$ וגם $Av = -v$ת אם נשווה נקבל ש$v = -v$ ולכן $v = 0$. מה שמוכיח ש $W \cap U = \{0\}$.

<u>הכלה $\subseteq$</u>: נקח וקטור כללי בסכום $u + w \in U + W$ ונראה ש $u + w \in V$.
לשם כך נחשב:

$$(A^2-I)(u+w) = (A^2-I)u+(A^2-I)w = A^2u-u+A^2w-w = A(-u)-u+A(w)-w = u-u+w-w = 0$$

השיוויון האמצעי נובע מכך ש$u \in U$ו $w \in W$ (ומאסוציאטיביות של כפל מטריצות).

<u>הכלה $\supseteq$</u>: נקח וקטור כללי $v \in V$ ונרצה להציג אותו כסכום של וקטורים (אחד מU ואחד מW).
נתבונן בוקטורים $u = \frac{v-Av}{2}, w = \frac{v+Av}{2}$ ונשים לב שאכן $v = u + w$.

נוכיח ש $u \in U$:

$$Au = A\left(\frac{v - Av}{2}\right) = \frac{Av - A^2v}{2} = \frac{Av - v}{2} = -\frac{v - Av}{2} = -u$$

נוכיח ש $w \in W$:

$$Aw = A\left(\frac{v + Av}{2}\right) = \frac{Av + A^2v}{2} = \frac{Av + v}{2} = w$$

שימו לב שהשתמשנו בכך ש$v \in V$ ולכן $A^2v = v$.

(ג) i. הפרכה: למערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון, אבל $\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$ ולמערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ אין פתרון.

ii. הוכחה: נניח שv מקיים $A^2v = b$, אזי $A(Av) = b$. נקח $w = Av$ אזי מתקיים $Aw = b$ כלומר שיש פתרון למערכת $A^2x = b$.