תירגול 12

1. הוכח/הפרך: $diamB(a,r)=diamB[a,r]$
פתרון: בדיסקרטית $diamB(x,1)=0\neq 1=dieamB[a,1]$.

2. תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכח/הפרך את הטענות הבאת:

   (א) הגרף G_f סגור ב $\mathbb{R}^{n+1}$
   פתרון: יהיו סדרת נקודות בגרף שמתכנסת $\left(x^k,f(x^k)\right)\to(y,z)$ אזי היא מתכנסות רכיב - רכיב בפרט $x^k\to y, f(x^k)\to z$ מרציפות הפונקציה נקבל כי $f(x^k)\to f(y)$ ולכן $f(y)=z$ וסימנו.

   (ב) הפנים של G_f ריק
   פתרון: נוכיח כי לא מכיל אף קבוצה פתוחה בסיסית. אכן נניח בשלילה כי כן אזי $\prod_{i=1}^{n+1}B_i$ אבל עבור $(x_1,\dots x_n)$ יש להם תמונה אחת תחת f ב B_{n+1}

   (ג) הגרף הומי' ל $\mathbb{R}^n$
   פתרון: נטיל על ה n רכיבים הראשונים. אזי $P:G_f\to\mathbb{R}^n$ רציפה ע"י צמצום התחום והפיכה. ההופכית $x\mapsto(x,f(x))$ רציפה רכיב רכיב. ולכן הומ'

   (ד) הגרף צפוף ב $\mathbb{R}^{n+1}$
   פתרון: הפרכה: זה קבוצה סגורה ולכן הסגור שלה הוא היא עצמה.

3. תזכורת: X הוא קומפקטי מקומי הוא אם לכל נקודה יש סביבה שלו שהיא קומפקטית.

4. תרגיל: הוכיחו כי $\mathbb{R}^\infty$ הוא לא קומפקטי מקומי.
הוכחה: תהא A סביבה של 0 ונניח שהיא קומפקטית. מהגדרת סביבה יש קבוצה פתוחה בסיסית שמוכלת בה ולכן קיימת $\prod U_i\subseteq A$ כאשר קיים $U_i=\mathbb{R}$. נקבל כי $\prod_{j\neq i}\{0\}\times\mathbb{R}\subseteq A$ היא סגורה ולכן קומפקטית. אבל היא הומי' ל $\mathbb{R}$ סתירה.

5. תרגיל: מכפלה סופית של קומפקטיות מקומית היא קומפקטי מקומי.
פתרון: יהא $(x_i)\in\prod X_i$ אזי קיימות סביבות $x_i\in A_i$ כך שקומפקטית. ולכן $\prod A_i$ גם קומפקטית והיא סביבה של הנקודה (x_i).

6. תרגיל: במרחבים נורמים כל הכדורים הסגורים הומ'.
פתרון: נוכיח $B[a,r]\cong B[0,1]$ אכן נגדיר $f:B[a,r]\to B[\frac{1}{r}a,1]$ ע"י $f(x)=\frac{1}{r}x$ $\|x-a\|\leq r\Rightarrow\|\frac{1}{r}x-\frac{1}{r}a\|\leq 1$. בנוסף $B[a,1]\cong B[0,1]$ ע"י $f(x)=x-a$

7. תרגיל: כל כדור סדור $B[f,r]\subseteq C[0,1]$ אינו קומפקטי
פתרון: מספיק להראות עבור $B[0,1]$ אכן אם הוא קומפקטי ניקח את הקבוצה $\{f_n\}$ שמוגדרת 1מהנקודה $\frac{1}{n}$ וקו שעולה מאפס מהנקודה $\frac{1}{n+1}$. קבוצה זאת סגורה כי המרחק של כל שניים הוא 1 ולכן אין סדרות קושי. כיון שסגורה היא קומפקטית אבל הטופולוגיה המושרית עליה היא דסקרטית.

8. תרגיל : יהא X מ"מ ו C קומפטקית ו F סגורה. $C \cap F \neq \emptyset \iff d(C,F) > 0$.
פתרון : אם המרחק גדול מאפס החיתוך ריק.
כעת נניח כי החיתוך ריק. נניח בשלילה כי $d(C,F) = 0$. נגדיר פונקציה $C \to \mathbb{R}$ ע"י $c \mapsto d(c,F)$ היא רציפה מקומפקטית ולכן מקבל מיני'. לכן קיים c כך ש $d(c,F) = 0$ אבל אז יש סדרה $d(c,f_i) \to 0$ כאשר $f_i \in F$. כלומר, $f_i \to c$. וכיוון ש F סגורה נקבל כי $c \in F$. סתירה.

9. תרגיל: X קשיר ובן מניה. הוכיחו כי כל $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה היא קבועה.
פתרון : תמונה של קשיר הוא קשיר ולכן זה קטע כלשהוא . אם זה לא היה נקודות הוא היה לא בן מניה.

10. תרגיל: נניח $X = O_1 \uplus O_2, Y = U_1 \uplus U_2$ ו $O_i \cong U_i$ הוכיחו כי $X \cong Y$.
פתרון: נסמן $f_i : O_i \to U_i$ הומי. טענה $f = \cup f_i$ הומי. הוכחה: f הפיכה ורציפה כי רציפה בכל O_i ומסכימה על החיתוך הריק. כנ"ל לגבי ההופכית.

(א) הוכיחו כי $\mathbb{R} \setminus \{0\} \cong \{1,2\} \times \mathbb{R}$
פתרון : $(0,\infty) \cong \{1\} \times \mathbb{R}, (-\infty,0) \cong \{2\} \times \mathbb{R}$