1

משפט סנדוויץ' לחישוב גבולות:

יהיו $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ שלוש פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של הנקודה $x=a$ (פרט אולי לנקודה a עצמה)

ונניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

ונניח כי קיימים הגבולות $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \in \mathbb{R}$

אזי $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

תרגיל: חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(1/x)}$$

פתרון: מתקיים $1 = 2-1 \le 2+\sin(1/x) \le 2+1 = 3$

ולכן

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin(1/x)} \le 1$$

עבור $x>0$ מתקיים

$$x \ge \frac{x}{2+\sin(1/x)} \ge \frac{x}{3}$$

$$\begin{matrix} x & & \frac{x}{2+\sin(1/x)} & & \frac{x}{3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{matrix}$$

עבור $x<0$ מתקיים

$$x \le \frac{x}{2+\sin(1/x)} \le \frac{x}{3}$$

ולכן קיבלנו: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin(1/x)} = 0$

Scanned by CamScanner

כלל:

1. אם $f(x)>0$ אזי

$$\left(x_0 \text{ יכול להיות } \infty\right) \quad \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))}$$

2. אם $\lim_{x\to x_0} h(x) = \infty$

⇓

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)} = e^a$$

דוגמאות:

1. חשבו את

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$$

פתרון: לפי חלק 1 של הכלל הדוגמא:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

נחשב את:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+\sqrt{x})}}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{1+x}{2+x}}_{\downarrow\, 1}\right)}_{\downarrow\, 0}\right) = 0$$

3

ומכאן נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = e^{0} = \underline{1}$$

<u>הערה:</u> המעבר האחרון לפי המשפט הבא:

אם f רציפה ב- $x=a$ ואם עבור g

$\lim_{x\to x_0} g(x)=a$ אזי

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(a)$$

(2).

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

<u>פתרון:</u>

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-3\ln(1-3x)}{-3x}} = e^{-3}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$$

<u>פתרון:</u> נרצה לחלק את המונה והמכנה ב- x
אך יש לעשות זאת בזהירות.
נשים לב: $\sqrt{x^2}=|x|$ וכאשר x שלילי
מת"ק $\sqrt{x^2}=-x$, ולכן:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2}$$

הגדרה: (גבולות חד צדדיים)

לפעמים נרצה להגדיר גבול רק מצד אחד, שכן, ישנן פונקציות שאינן מוגדרות עבור $x<0$, למשל $\sqrt{x}$. לכן יש טעם להגדיר במקרה כזה גבול רק מימין או משמאל.

הגדרה (לפי קושי)

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ ק"ם $\delta>0$ כך שאם $0<x-x_0<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ ק"ם $\delta>0$ כך שאם $0<x_0-x<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה (לפי היינה)

תהי $\{x_n\}$ סדרה המקיימת $x_n\to x_0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $x_n>x_0$ אם לכל סדרה כזאת מתקיים $f(x_n)\to L$ אזי $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$

(באותו אופן מגדירים גבול משמאל).

משפט: תהי f פונקציה. הגבול הדו-צדדי של f בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$ ק"ם $\iff$ הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

כלומר:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=L\ ,\ L\in\mathbb{R}$$

תרגיל: חקרו את הרציפות החד-צדדית

ב $x=3$ של

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}$$

פתרון: הגבול לא ק"ם כי הפונקציה לא

מוגדרת בסביבה השמאלית של $x=3$

(היא לא מוגדרת עבור $|x|<3$)

(נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)(x+3)}}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\infty$$

תרגיל: עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ ק"ם הגבול

ל- $f(x)$ בנקודה $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)}{x} & x>0\\[2ex] \dfrac{x+5}{2x+a} & x<0\end{cases}$$

פתרון: מתק"ם

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+5}{2x+a}=\frac{5}{a}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin(3x)}{3x}=3$$

לכן נדרוש $3=\frac{5}{a}$ ומכאן נקבל

$$a=\frac{5}{3}$$

(6)

הגדרה: רציפות בנקודה

נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. f מוגדרת ב-x_0 (כלומר x_0 נמצא בתחום ההגדרה של f).
2. ל-f יש גבול ב-x_0
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

כלומר הערך של הגבול שווה לערך של הפונקציה בנקודה.

הערה: דבר ראשון שפונקציות אלמנטריות הן רציפות בכל תחום הגדרתן.

דוגמאות:

1. $f(x)=\frac{|x-5|}{x-5}$ אינה רציפה ב-$x=5$ משום שאינה מוגדרת שם.

2. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+2^{\left(\frac{1}{x-2}\right)}} & x\neq 2\\ \frac{1}{2} & x=2\end{cases}$$ (שימו לב ש-$\frac{1}{x-2}$ מופיע בחזקה של 2)

(שים לב שהפונקציה מוגדרת ב-$x=2$ אבל אין לה גבול שם, משום ש:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0\neq 1=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

תרגיל: מצאו $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases}-2\sin(x) & x\leq -\frac{\pi}{2}\\ a\sin(x)+b & -\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

פתרון:

לכל $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ הפונקציה רציפה כהרכב
של פונקציות אלמנטריות רציפות)

נותר לבחון את הנקודות $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

1. $x=-\frac{\pi}{2}$: מצדדים

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \cancel{-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2}$$

$$= a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -a+b$$

כדי שהגבול יהיה קיים חייב להתקיים

$$-a+b=2$$

שימו לב שאם רוצה שהפונקציה תהיה רציפה
חייב להתקיים $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

סה"כ לכן נקבל משוואה $-a+b=2$

2. $x=\frac{\pi}{2}$: מצדדים

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b =$$
$$= a+b$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

לכן המשוואה
לקיום הגבול הינו

$$a+b=0$$

סה"כ נקבל:

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ a+b=0 \end{cases}$$

ומכאן

$$a=1$$
$$b=-1$$

מיון נקודות אי רציפות

הגדרה (אי רציפות סליקה)

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של הנקודה $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.
נאמר כי x_0 היא נקודת אי רציפות סליקה אם:

1. ד"ם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ או שהפונקציה אינה מוגדרת ב- x_0.

<u>דוגמה</u>: נראה כי לפונקציה $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ יש אי רציפות סליקה ב- $x=2$.

<u>פתרון</u>: $f(x)$ מוגדרת בסביבה של $x=2$ אך אינה מוגדרת ב $x=2$ עצמה.
כמו כן:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4) = 12$$

הגבול ד"ם ולכן הנקודה היא אי רציפות סליקה.

<u>הערה</u>: נוכל להפוך את הפונקציה הנ"ל לרציפה ע"י כך שנגדיר אותה ב $x=2$ להיות 12, כלומר:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & x \neq 2 \\ 12 & x=2 \end{cases}$$

כלומר הוספנו את $x=2$ לתחום ההגדרה של f.

<u>הגדרה:</u> נק' $x=x_0$ נקראת נק' אי רציפות ממין ראשון של הפונ' $f(x)$ אם:

1. $f(x)$ מוגדרת בסביבה מסויימת של $x=x_0$ פרט אולי לנקודה x_0 עצמה.
2. קיימים הגבולות החד צדדיים
3. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

<u>לדוגמה:</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x<1 \\ x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

קל לראות שהגבולות החד צדדיים קיימים לא שווים ב $x=1$ ולכן זו נקודת אי רציפות ממין ראשון.

<u>הגדרה:</u> נק' x_0 נקראת נק' אי רציפות ממין שני של f אם:

א) $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 פרט אולי ל- x_0 עצמה.

ב) לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים אינו קיים (במובן הרחב).

<u>לדוגמה:</u> $x=0$ היא נקודת אי רציפות של $f(x)=\cos(\frac{1}{x})$. אף אחד מהגבולות החד צדדיים אינו קיים ב $x=0$.

תרגיל: מיינו את כל סוגי רציפות של הפונקציה הבאה:

1.
$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)}$$

פתרון: לפני שנמיין את הנקודות, נבדוק כל (נקודות חשודות: הפונקציה שלנו אינה מוגדרת בנקודות $x = 0,-1,1$.

נפשט מעט את f:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)}$$

עבור $x=0$ נבדוק:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)}{x+1} = -1$$

הגבול קיים ולכן $x=0$ היא אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$ נבדוק:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = 0$$

ולכן כל סוגי רציפות: זה מסוג סליקה...

עבור $x=-2$ נבדוק:

הפונקציה שלנו אינה מוגדרת כי המכנה שלה מתאפס ולכן מסוג שני כי הגבול חד צדדי אינסופי.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

(11)

ב.
$$f(x)=\frac{x}{\sin(\sqrt{|x|})}$$

פתרון: נקודות אי רציפות כאשר המכנה מתאפס ולכן הנקודות $x_k=\pm(\pi k)^2$
הן לכל $k\in\mathbb{Z}$ אלה הן נק' אי רציפות.
נחלק לשני מקרים:

1) אם $k\neq 0$ נקבל $\lim_{x\to x_k^+} f(x)=\pm\infty$ ולכן הגבול
החד צדדי אינו קיים ולכן זו נקודת אי רציפות ממין שני.

2) $k=0$ נקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}\cdot\frac{|x|}{|x|}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt{|x|}}{\sin(\sqrt{|x|})}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{x\cdot\sqrt{|x|}}{|x|}}_{0}=0$$