תרגול 11

5 בינואר 2016

"איזומורפיזם בין קס"חים"

הגדרה: יהיו A ו־B שתי קבוצות סדורות חלקית, אם ניתן לקבוע העתק חד חד ערכי φ של A על B, כך שאם $a_1 \leq a_2$ ב־A אז $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ ב־B; ולהיפך אם $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ ב־B אז $a_1 \leq a_2$ ב־A. הקסח"ים A ו־B נקראות איזומורפיות. ההעתקה φ נקראת איזומורפיזם.

דוגמה:
יהיו

$$A = \{60, 30, 20, 12, 10, 6, 4, 2\}$$

סדורה חלקית לפי היחס |(מחלק בלי שארית).

$$B = P(\{1,2,3\})$$

הסדורה חלקית לפי יחס ההכלה $\subseteq$.
נקבע את ההעתקה

$$\varphi = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 12 & 10 & 6 & 4 & 2 \\ \{1,2,3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \phi \end{bmatrix}$$

נשים לב כי איזומורפיזם שומר על כל התכונות של קס"ח איבר מקסימלי חייב לעבור למקסימלי וכו'. (אם דיאגרמת ון זהה אזי זה אישומורפיזם) תרגילים

1. יהיו A, B קבוצות סדורות חלקית איזומורפיות ו־$\varphi : A \longrightarrow B$ איזומורפיזם, נוכיח כי אם $\varphi(a)$ מינימלי ב־B אזי a מינימלי ב־A.

הוכחה:

נרצה להוכיח כי a מינימלי ב־A ז"א לא לכל $y \in A$ מתקיים $y \leq a \longrightarrow y = a$.
תהי $y \in A$
אם $y \nleq a$ כמובן שהטענה מתקיימת (שקר גורר הכל).
אם $y \leq a \in R$ אזי $\varphi(y) \leq \varphi(a)$ אולם $\varphi(a)$ מינימלי לכן $\varphi(y) = \varphi(a)$, φ חח"ע ולכן $y = a$. ■

2. $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים ו־$\mathbb{R}_+$ קבוצת הממשיים החיוביים. סדורות לינארית (יחס סדר מלא) על ידי היחס $\leq$ בין מספרים.
הוכיחו כי ההעתקה $\varphi\left(x\right)=log\left(x\right)$ היא איזומורפיזם בין $\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}_+$.

פתרון:

log היא פונקציה מ־ $\mathbb{R}_+$ ל־ $\mathbb{R}$ כי הנגזרת היא $\frac{1}{x}$ חיובית בתחום ההגדרה $\mathbb{R}_+$ לכן הפונקציה עולה ולכן וחח"ע.
הפונקציה היא על כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $log\left(e^x\right)=x$ ו־ $e^x\in\mathbb{R}_+$ לכן קיים מקור בתחום ההגדרה.
צריך להוכיח כי היחסים נשמרים.
log פונקציה עולה ולכן אם $x_1\leq x_2$ אז $log\left(x_1\right)\leq log\left(x_2\right)$, פונקציית e גם כן עולה ולכן אם $x_1\leq x_2$ אז $e^{x_1}\leq e^{x_2}$.$\blacksquare$
(פונקציה חד חד ערכית ועל שאינה איזומורפיזם היא $\frac{1}{log(x)}$ חד חד ערכית מאותם שיקולים על מאותם שיקולים אולם אינו שומר על היחסים).

שרשראות ואנטי שרשראות

הגדרה־ תהי $\left(A,\leq\right)$ קס"ח תהי $C\subseteq A$.
נאמר ש־Cשרשרת אם לכל $x,y\in C$ מתקיים $x\leq y$ או $y\leq x$.
נאמר ש־Cאנטי שרשרת אם לכל אין ב־C שני איברים $y\neq x$ כך ש־$y\leq x$. (כלומר אין זוג הניתן להשוואה ב־C)

הגדרה־ תהי $\left(A,\leq\right)$ קס"ח
האורך של הקס"ח הוא העוצמה המירבית של שרשרת בקס"ח, מסומן $l\left(A\right)$.
הרוחב של הקס"ח הוא העוצמה המירבית של אנטי שרשרת בקס"ח, מסומן $w\left(A\right)$.

משפט־ אם $\left(A,\leq\right)$ קס"ח אזי יש חלוקה של־A ל־ $w\left(A\right)$ אנטי שרששאות אך אין חלוקה למספר קטן יותר של אנטי שרשראות. (כדאי להראות את זה עם דיאגרמת ימ"ש פשוטה).

תרגילים

1. הוכיחו כי בכל קס"ח האיברים המינימליים הם אנטי שרשרת.

פתרון:

תהי $\left(A,\leq\right)$ קס"ח.
נסמן $C=\{$קבוצת האיברים המינימליים ב־$A\}$.
יהיו $a\neq b\in A$ צ"ל כי $a\nleq b$ וגם $b\nleq a$.
אם $a\leq b$ אזי $b=a$ כי b מינימלי לכן $a\nleq b$.
אם $b\leq a$ אזי $b=a$ כי a מינימלי. לכן $b\nleq a$