תורת הקבוצות — תרגיל בית 5
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ט"ז בסיון, תשע"ה*

תקציר

מונוטוניות ורציפות, חילוק סודרים עם שארית.

תזכורות

1. פונקציית סודרים $f\colon ON \to ON$ היא **מונוטונית** אם לכל שני סודרים $\alpha < \beta$ מתקיים $f(\alpha) < f(\beta)$; פונקציה מונוטונית כזו היא **רציפה** אם לכל סודר גבולי β מתקיים $f(\beta) = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$.
2. נניח כי f פונקציית סודרים מונוטונית ורציפה, β סודר גבולי ו־B תת־קבוצה של β המקיימת $\sup B = \beta$. אזי $f(\beta) = \sup\{f(\gamma) : \gamma \in B\}$.

1 מונוטוניות ורציפות

1. רשות: פונקציה מונוטונית מקיימת לכל סודר α בתחום, $f(\alpha) \geq \alpha$.

פתרון נניח בשלילה כי קיים סודר α בתחום, עבורו $f(\alpha) < \alpha$. אזי נביט בסודר α הראשון המקיים זאת. מונוטוניות היא נוסחא אחרת לשמירת סדר, ולכן מתקיים $f(f(\alpha)) < f(\alpha)$, ובסתירה לכך ש־α הוא הראשון המקיים זאת. ■

2. רשות: נגדיר את טופולוגיית הסדר (order topology) על הסודר α באמצעות בסיס המורכב מהקבוצות הבאות:

$$\begin{aligned}
[0,\beta) &= \{\gamma\colon \gamma < \beta\} = \beta \\
(\beta_1,\beta_2) &= \{\gamma\colon \beta_1 < \gamma < \beta_2\} = \beta_2 \setminus S(\beta_1) \\
(\beta,\alpha) &= \{\gamma\colon \beta < \gamma < \alpha\} = \alpha \setminus S(\beta)
\end{aligned}$$

שימו לב כי בבסיס זה נמצאים כל הנקודונים המכילים סודר עוקב וכן הנקודון $\{0\}$, אך אין נקודונים עבור סודרים גבוליים. הראו כי בטופולוגיה זו, פונקציה מונוטונית היא רציפה אם ורק אם היא מקיימת את ההגדרה לעיל.

* להגשה עד יום **שני** כ"ב באייר (11 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

פתרון פונקציה $g\colon X\to Y$ היא רציפה א.ס.ם. המקור של כל קבוצה מתת־בסיס של Y היא פתוחה ב־X. ניתן להרכיב תת־בסיס בטופולוגיית הסדר מהטיפוס הראשון והטיפוס השלישי של הבסיס שהבאנו לעיל. תהי אפוא $f\colon \alpha_1\to\alpha_2$ מונוטונית. נראה אילו קבוצות מתת־הבסיס הזה מקיימות רציפות באופן טריוויאלי, ואילו קבוצות אינן כאלה.

- $[0,\beta)$. נחפש מי האיבר הראשון בקבוצה $\mathrm{im}\left(f\right)\setminus\beta$, ואת המקור שלו נסמן γ. אם קבוצה זו ריקה, נסמן $\gamma=\alpha_1$. מתקיים $f^{-1}\left([0,\beta)\right)=[0,\gamma)$. כמובן, נעזרנו כאן במונוטוניות הנתונה לנו, וכך גילינו כי בטיפוס זה אין דוגמא שתסתור את הרציפות.[1]
- (β,α_2). נחפש מי האיבר הראשון בקבוצה $\mathrm{im}\left(f\right)\cap(\beta,\alpha_2)$, ואת המקור שלו נסמן γ. אזי $f^{-1}\left((\beta,\alpha_2)\right)=[\gamma,\alpha_1)$. אם γ הוא עוקב, אז קיבלנו כאן קבוצה פתוחה (היא קבוצה מהבסיס). אבל אם γ גבולי אז הקבוצה הזו איננה פתוחה.

קיבלנו לסיכום כי הפונקציה f רציפה א.ס.ם. לכל סודר $\beta<\alpha_2$, הסודר הראשון ב־$\mathrm{im}\left(f\right)\cap(\beta,\alpha_2)$ מתקבל מסודר עוקב (או אפס). נהפוך את הכיוון: אם γ גבולי אז אנו דורשים שיתקיים $f\left(\gamma\right)$ איננו ראשון באף קבוצה מהצורה $\mathrm{im}\left(f\right)\cap(\beta,\alpha_2)=\mathrm{im}\left(f\right)\setminus S\left(\beta\right)$. כמובן, ברור ש־$f\left(\gamma\right)$ ראשון באיזו סיפא של התמונה של f,[2] ולכן הפתרון הוא ש־$f\left(\gamma\right)$ יהיה ראשון רק בסיפא המתחילה באיבר גבולי. בפרט $f\left(\gamma\right)$ הוא גבולי בעצמו. ברור שהוא איננו ראשון באף סיפא הנקבעת על ידי איבר גדול יותר (כי אם $\beta<f\left(\gamma\right)$ אז $f\left(\gamma\right)\notin\mathrm{im}\left(f\right)\setminus\beta$). עלינו לוודא שלאף סודר עוקב $S\left(\beta\right)$ המקיים $S\left(\beta\right)\le f\left(\gamma\right)$, $f\left(\gamma\right)$ איננו ראשון בקבוצה $\mathrm{im}\left(f\right)\setminus S\left(\beta\right)$. כדי שזה יתקיים, עלינו למצוא בתמונה $\mathrm{im}\left(f\right)$ איבר גדול שווה $S\left(\beta\right)$ וקטן מ־$f\left(\gamma\right)$. טענה זו, לכל סודר β, היא בדיוק הטענה שהובאה בהגדרת הרציפות בתזכורת. ■

3. הראו כי עבור $\alpha>0$, $f\left(\beta\right):=\alpha\cdot\beta$ היא פונקציה מונוטונית ורציפה.

פתרון

- מונוטוניות: נניח $\beta_1<\beta_2$. אזי

$$f\left(\beta_1\right)=\alpha\cdot\beta_1\cong\beta_1\times\alpha=\overset{(\beta_1,0)}{\beta_2\times\alpha}<\beta_2\times\alpha\cong\alpha\cdot\beta_2=f\left(\beta_2\right)$$

על ידי הסימן $\cong$ אנו סימנו כאן איזומורפיזם סדר, ומתחבאת כאן טענה שיחס הסדר על כל קבוצה מוגדר כפי שאנו מצפים שיוגדר.

- רציפות: נניח β גבולי. אנו טוענים כי f רציפה, דהיינו

$$\alpha\cdot\beta=\sup\left\{\alpha\cdot\gamma\colon\gamma<\beta\right\}$$

ממונוטוניות, הכיוון $\geq$ טריוויאלי, ויש להראות רק $\leq$. מתקיים $\alpha\cdot\beta\cong\beta\times\alpha$. ניקח אפוא איבר $(\delta,\epsilon)\in\beta\times\alpha$, ונראה שהוא חסום על ידי איבר של הקבוצה $\left\{\gamma\times\alpha\colon\gamma<\beta\right\}$. לפי הנתון β גבולי, ולכן $\delta\in\beta$ גורר שגם $\delta+1\in\beta$. ולכן $(\delta,\epsilon)<(\delta+1,0)$, ומתקיים

$$(\delta,\epsilon)\in\overset{(\delta+1,0)}{\beta\times\alpha}=(\delta+1)\times\alpha\in\left\{\gamma\times\alpha\colon\gamma<\beta\right\}$$

[1] גם אם יצא $\gamma=0$, הטיעון כאן יישאר נכון.
[2] הכוונה כאן היא לקבוצה מהצורה $\mathrm{im}\left(f\right)\setminus\beta$ עבור β סודר כלשהו.

מצאנו כאן כי כל איבר של $\alpha\cdot\beta$ חסום בקבוצה הזו, ולכן מתקיים $\leq$ כנדרש. בסך הכל מצאנו את השויון המתבקש. ∎

תוצאה אם β גבולי, $B\subseteq\beta$ המקיימת $\sup B=\beta$, אזי $\sup\{\alpha\cdot\gamma\colon\gamma\in B\}=\alpha\cdot\beta$.

4. הפריכו:

(א) הפונקציה $f(\beta)=\beta+\alpha$ היא מונוטונית ורציפה.

פתרון ניקח $\alpha=1$, $\beta=\omega$. ואז

$$\begin{aligned}\sup\{f(\gamma):\gamma<\omega\}&=\sup\{\gamma+1\colon\gamma<\omega\}=\sup\{\gamma+1\colon\gamma+1<\omega\}\\&=\omega<\omega+1=f(\omega)\end{aligned}$$

∎

(ב) יהי $\alpha>0$. הפונקציה $g(\beta)=\beta\cdot\alpha$ היא מונוטונית ורציפה.

פתרון ניקח $\alpha=2$, $\beta=\omega$. ואז

$$\sup\{g(\gamma):\gamma<\omega\}=\sup\{\gamma\cdot 2\colon\gamma<\omega\}=\omega<\omega\cdot 2=g(\omega)$$

∎

בשני המקרים האחרונים, הפונקציות מונוטוניות במובן החלש.

(ג) מצאו סודר גבולי β ותת־קבוצה שלו B המקיימת $\sup B=\beta$ אך $B\neq\beta$ עבורם $g(\beta)\neq\sup\{g(\gamma):\gamma\in B\}$.

פתרון ניקח $\alpha=2$, $\beta=\omega$, $B=\{2n\colon n\in\omega\}$ קבוצת הטבעיים הזוגיים. ברור ש־$\sup B=\beta$, אך

$$\sup\{g(\gamma):\gamma\in B\}=\sup\{2n\cdot 2\colon n\in\omega\}=\omega<\omega\cdot 2=g(\omega)$$

∎

2 שונות

1. יהיו $\alpha_1\leq\alpha_2$, $\beta_1\leq\beta_2$. הוכיחו כי $\alpha_1+\beta_1\leq\alpha_2+\beta_2$. היעזרו בתרגיל בית 4 (פרק 2 שאלה 1).

פתרון נראה טענה כללית יותר: נניח כי α,β סודרים, וקיימת פונקציה שומרת סדר $f\colon\alpha\to\beta$. אזי $\alpha\leq\beta$. נניח בשלילה כי $\alpha>\beta$. אז פונקציית ההכלה $g\colon\beta\to\alpha$ גם היא שומרת סדר. מצאנו אפוא פונקציות שומרות סדר בין שתי קבוצות סדורות היטב, ולפי הגרסא של קנטור־שרדר־ברנשטיין עבר סודרים, שתי הקבוצות איזומורפיות סדר. מכיוון ששתיהן סודרים, קיבלנו $\alpha=\beta$, סתירה להנחה בשלילה.
כעת נגדיר פונקציה שומרת סדר $f\colon\alpha_1\uplus\beta_1\to\alpha_2\uplus\beta_2$ באופן טבעי, $f(i,\delta)=(i,\delta)$. קל לראות שזוהי פונקציה שומרת סדר. ∎

3 חילוק עם שארית

1. הוכיחו כי לכל α,β כך ש־$\beta>0$ קיימים ויחידים γ,δ כך ש־$\delta<\beta$ ו־$\alpha=\beta\gamma+\delta$. מציאת $\gamma.\delta$ אלו נקראת **חילוק עם שארית**. נסמן, בתנאים אלו, $\gamma:=\alpha/\beta$ ו־$\alpha \bmod \beta:=\delta$.

הדרכה הראו את טענת העזר הבאה: נניח $\alpha\le\beta<0$. אזי קיים γ גדול ביותר כך ש־$\alpha\le\beta\cdot\gamma$.

פתרון נביט בקבוצה $\{\gamma\in\alpha+2\colon\beta\gamma>\alpha\}$. קבוצה זו איננה ריקה, כי $\beta(\alpha+1)>\alpha\ge\beta\alpha$. לכן יש לה איבר ראשון, φ. אנו טוענים כי φ זה הוא עוקב, ולכן קודמו המיידי הוא γ הנדרש בהדרכה. נניח בשלילה כי φ אינו עוקב.

- $\varphi=0$. קיבלנו שמתקיים $\alpha>\beta\cdot0$, אבל $\alpha<0$. סתירה.
- φ גבולי. הראינו לעיל שהפונקציה $g(\gamma)=\beta\gamma$ רציפה, ולכן מתקבל $\beta\varphi=\sup\{\beta\gamma\colon\gamma<\varphi\}$. לכן יש $\gamma<\varphi$ עבורו $\alpha\le\beta\gamma<\beta(\gamma+1)$, ובסתירה לכך ש־$\varphi$ הקטן ביותר בקבוצה.

אם כן, φ עוקב, וקודמו הוא γ המבוקש בהדרכה. נקבע כי γ זה הוא המנה המבוקשת בשאלה, דהיינו הוא α/β. נסמן $\delta=\alpha-\beta\gamma$ את השארית. מותר כמובן לחסר כי $\alpha\ge\beta\gamma$. אילו $\delta\ge\beta$, הרי שהיה מתקיים $\alpha=\beta\gamma+\delta\ge\beta\gamma+\beta=\beta(\gamma+1)$, ובסתירה לבחירת γ כגדול ביותר. מצאנו $\delta<\beta$. בזאת הוכחנו קיום γ,δ הנדרשים.

נותר להראות יחידות. נניח כי גם γ',δ' מקיימים הנדרש. לפי הדרך בה בחרנו לעיל את γ ברור ש־$\gamma\le\gamma'$, כי אחרת γ' היה גדול יותר שמקיים את הטענה שבהדרכה. אם מתקיים שוויון, אז לפי פרק 2 שאלה 1 לעיל גם $\delta=\delta'$. נניח בשלילה כי $\gamma<\gamma'$. מתקיים $\alpha=\beta\gamma'+\delta'=\beta\gamma+\delta$. נקבל

$$\beta\gamma+\delta=\beta\left[\gamma'+(\gamma-\gamma')\right]+\delta=\beta\gamma'+\beta(\gamma-\gamma')+\delta=\beta\gamma'+\delta'$$

לפי פרק 2 שאלה 1 לעיל, $\beta(\gamma-\gamma')+\delta=\delta'$. אבל $\gamma-\gamma'\ge1$, ולכן

$$\delta'=\beta(\gamma-\gamma')+\delta\ge\beta\cdot1+\delta=\beta+\delta\ge\beta$$

סתירה להנחה $\delta'<\beta$. ■

2. חשבו את $\omega \mod 5$ ואת $(\omega+\omega) \mod \omega$.

פתרון מתקיים $\omega=5\omega+0$ וכן $\omega+\omega=\omega\cdot2+0$, ולכן שתי השאריות בשאלה הן 0. ■

ב ה צ ל ח ה!