# תרגול - אנליזה פונקציונלית

17 בדצמבר 2018

1. הראו שכל קבוצה של ב $\mathbb{R}$ היא איחוד בן מניה של קטעים פתוחים בזוגות.

**פתרון:** תחילה נראה את שהטענה נכונה עבור קטע סופי $(a,b)$. נראה תחילה שניתן להציג כל קבוצה כאיחוד זר של קטעים פתוחים. תהי $U$ קבוצה פתוחה ב $(a,b)$. לכל $t\in U$ נגדיר

$$M_t=\inf\{x\in(a,b)\,|t<x\wedge x\notin U\}$$

(חסם מלרע של האיברים ב $(a,b)$ שגדולים מ $t$ ולא איברים של $U$). נשים לב שאם $\{x\in(a,b)\,|t<x\wedge x\notin U\}=\emptyset$ אזי $M_t=b$. באופן דומה נגדיר

$$m_t=\sup\{x\in(a,b)\,|x<t\wedge x\notin U\}$$

ונשים לב שאם $\{x\in(a,b)\,|x<t\wedge x\notin U\}=\emptyset$ אזי $m_t=a$. נשים לב שלכל $t\in U$, $(m_t,M_t)\subseteq U$ ולכל $t,s\in U$ מתקיים

$$(m_t,M_t)\cap(m_s,M_s)=\emptyset$$

או

$$.\,(m_s,M_s)=(m_t,M_t)$$

על מנת לראות זאת, נשים לב שאם $x\in(m_t,M_t)$ עבור $t\in U$ כלשהו, אזי $x\in U$ על פי ההגדרה של $m_t$ ו $M_t$. אם $(m_t,M_t)\cap(m_s,M_s)\neq\emptyset$, אזי החיתוך בה"כ $(m_t,M_s)$ או $(m_s,M_s)$. בשני המקרים מקבלים סתירה, כי בעצם קיבלנו ש $M_s\in(m_t,M_t)$בניגוד להדרה $M_s$. (מכיוון שהוא סופרמום של תת־קבוצה של $U^c$, שהיא קבוצה סגורה, הוא נק' גבול של קבוצה סגורה ולכן הוא איבר של $U^c$. לכן $U$ היא איחוד של קטעים פתוחים ב $(a,b)$. (שימו לב שכל קטע פתוח ב $(a,b)$ הוא קטע פתוח).

עכשו, נראה שהאיחוד הוא בן מניה. נסמן ב $A$ את אוסף הקטעים הזרים שמצאנו: כלמר

$$.\bigcup_{I\in A}I=U$$

נשים לב שלכל קטע $I$ באיחוד, קיים $n$ מינימלי כך ש $\frac{1}{n}\leq|I|<\frac{1}{n-1}$. (בקרה ש $n=1$, זה אומר פשוט שהקטע באורך גדול מ 1). נסמן

$$.A_n=\left\{I\left|\frac{1}{n}\leq|I|<\frac{1}{n-1}\right.\right\}$$

נשים לב ש

$$A=\bigsqcup A_n$$

($\bigsqcup$ מסמן איחוד זר: לכל $m \neq n$ מתקיים $A_n \cap A_m = \emptyset$). כמו כן, נשים לב שכלכ $n$, $A_n$ סופי, אחרת נקבל ש

$$\left|\bigcup_{I\in A_n} I\right| \geq \infty \cdot \frac{1}{n} = \infty .$$

אבל $I \subseteq U \subseteq (a,b)$ ולכן $\bigcup_{I\in A_n} I \subseteq (a,b)$ ו

$$\left|\bigcup_{I\in A_n} I\right| \leq |(a,b)| = b-a$$

וזאת סתירה. על מנת להשלים את ההוכחה נשים לב ש $\tan x$ היא פונקציה חח"ע ועל מ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ל $(-\infty,\infty)$, שבנוסף שומרת על קטעים פתוחים, כלמר $(a,b) \subseteq \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ היא קטע פתוח אם וקר אם $\tan[(a,b)]$ קטע פתוח ב $R$. הטענה על קבוצות פתוחות ב $R$ מתקבלת על ידי הפעלת $\tan^{-1}$ על קבוצה פתוחה ב $R$, הפעלת הטענה והפעלת $\tan$ חזרה.

2. יהי $(X,S)$ מרחב מדיד ו $\mu$ פונקציית קבוצות אי־שלילית אדיטיבית סופית, כך ש $\mu(\emptyset)=0$. נניח שאם $A_n$ היא סדרה עולה של קבוצות (כלמר $A_n \subseteq A_{n+1}$לכל $n$), אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. הראו ש $\mu$ היא מידה.

**פתרון:** על מנת להראות ש $\mu$ היא מידה מספיק להראות שלכל אוסף של קבוצות זרות בזוגות

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$$

מתקיים

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

אבל אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרים בזוגות, הסדרה $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ היא סדרה עולה. על פי ההנחה מתקיים

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_k) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_k) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_k\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(B_N) \\
&= \mu\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)
\end{aligned}$$

כנדרש.