תירגול 8

9 ביולי 2013

מרחב מכפלה פנימית

הגדרה: יהיה Vמרחב וקטורי מעל $K=\mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$ אזי מכפלה פנימית הינה פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים $v,u\in V$ סקלאר מ K (כלומר $<,>: V\times V\to K$) ומקיימת את האקסיומות הבאות:

1. לינאריות ברכיב הראשון לכל $\alpha\in K,\ v,u,w\in V$
   (א) $<\alpha v,w>=\alpha<v,w>$
   (ב) $<v+u,w>=<v,w>+<u,w>$
   בקיצור $<\alpha v+u,w>=\alpha<v,w>+<u,w>$
2. הרמנטיות לכל $v,u\in V$ מתקיים $<v,u>=\overline{<u,v>}$.
   (אם $K=\mathbb{R}$ זה אומר סימטריות $<v,u>=<u,v>$)
3. אי־שליליות לכל $v\in V$ מתקיים
   (א) $<v,v>\geq 0$ (מתכונה 2 נובע כי $<v,v>=\overline{<v,v>}$ ולכן $<v,v>\in\mathbb{R}$).
   (ב) $v=0\Leftrightarrow<v,v>=0$

טרמינולוגיה: V יקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ)
תכונות:

1. כמעט לינאריות ברכיב השני: $<v,\alpha u+w>=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$
   הוכחה:
   $$<v,\alpha u+w>=\overline{<\alpha u+w,v>}=\overline{\alpha<u,v>+<w,v>}$$
   $$=\bar{\alpha}\overline{<u,v>}+\overline{<u,v>}=\bar{\alpha}<v,u>+<v,w>$$
2. הכללה: $<\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i,\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j w_j>=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_i\bar{\beta}_j<v_i,w_j>$ (תרגיל)
3. לכל $v\in V$ מתקיים $<0,v>=<v,0>=0$
   הוכחה: $<0,v>=<0+0,v>=<0,v>+<0,v>\ \Leftarrow\ <0,v>=0$

דוגמאות למכפלות פנימיות:

1. $V=\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הסקלארית מוגדרת להיות
$$<x,y>=<(x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n)>:=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x^ty.$$

2. $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר מכפלה פנימית להיות
$$<z,w>=<(z_1,\dots z_n),(w_1,\dots w_n)>:=\sum_{i=1}^{n}z_i\bar{w}_i=z^t\bar{w}.$$

תרגיל: עבור $n=3$ חשב את המכפלה הפנימית של $v=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 2\end{pmatrix}$ עם

(א) $v_1=\begin{pmatrix}-i\\ -4\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$

פתרון: $<(1,i,2),(-i,-4,\sqrt{2})>=1\cdot i+i\cdot(-4)+2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}-3i$

(ב) $v_2=\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}$

פתרון: $<(1,i,2),(1,-i,0)>=1\cdot 1+i\cdot(i)+2\cdot 0=0$

(ג) $v_3=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 2\end{pmatrix}.$

פתרון: $<(1,i,2),(1,i,2)>=1\cdot 1+i\cdot(-i)+2\cdot 2=6$

(ד) $\begin{pmatrix}-4-i\\ -4-12i\\ \sqrt{2}-16\end{pmatrix}$

פתרון: $\begin{pmatrix}-4-i\\ -4-12i\\ \sqrt{2}-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\\ -4\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}1\\ i\\ 2\end{pmatrix}$ ולכן לפי תכונות מכפלה פנימית נקבל:

$$\begin{aligned}&<(-4-i,-4-12i,\sqrt{2}-16),(1,i,2)>=<v_1+4v_2-8v_3,v>\\&=<v_1,v>+4<v_2,v>-8<v_3,v>=\\&=(2\sqrt{2}-3i)+4\cdot 0-8\cdot 6=-48+2\sqrt{2}-3i\end{aligned}$$

3. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$. לכל $A,B\in V$ נגדיר $<A,B>=trace(AB^t).$
טענה: זאת מכפלה פנימי.
הוכחה:

(א)
$$<\alpha A+B,C>=trace((\alpha A+B)C^t)=trace(\alpha AC^t+BC^t)$$

$$= trace(\alpha AC^t) + trace(BC^t) = \alpha trace(AC^t) + trace(BC^t)$$
$$= \alpha < A, C > + < B, C >$$

(ב) $< A, B >= trace(AB^t) = trace((AB^t)^t) = trace(BA^t) =< B, A >$

(ג) משאלה 1 בבוחן נקבל ש $< A, A >= trace(AA^t) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(A_{ks})^2 \geq 0$ ושיוון אמ"מ $A = 0$.

4. $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{C} \mid \text{f is continuous function }\}$ מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[-1, 1]$ ל $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{C}$.

נגדיר $< f, g >:= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

טענה: זאת מכפלה פנימית.

הוכחה:

(א)

$$< \alpha f + g, h >= \int\limits_{-1}^{1} (\alpha f(x) + g(x))\overline{h(x)}\, dx =$$

$$\alpha \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\, dx + \int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\, dx = \alpha < f, h > + < g, h >$$

(ב) $< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \overline{g(x)\overline{f(x)}}\, dx = \overline{\int\limits_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\, dx} = \overline{< g, f >}$

(ג) $< f, f >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx \geq 0$

וקיים שיוויון אמ"מ $f = 0$ (כי f רציפה).

תרגיל: חשב $< \sin(x), \cos(x) >$

פתרון: $< \sin(x), \cos(x) >= \int\limits_{-1}^{1} \sin(x)\cos(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin(2x)}{2}\, dx = 0$.

נורמה

יהי Vמרחב וקטורי מעל $K = \mathbb{R}\backslash\mathbb{C}$אזי נורמה ($|| \cdot ||$) היא פונקציה המתאימה לכל וקטור מספר ממשי אי שלילי ($|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$) המקיימת את האקסיומות הבאות לכל $\alpha \in K,\, v, u \in V$:

1. $||v|| \geq 0$ ושיוון אמ"מ $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

3. אי שיוון המשולש: $||v+u|| \leq ||v|| + ||u||$

הערה: מועיל לחשוב על נורמה כפונקציה המודדת אורך/גודל של וקטור.

בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר נורמה כך: לכל $v \in V$ $||v|| := \sqrt{<v,v>}$
(מוגדר כי $<v,v> \geq 0$).
עובדה (תרגיל): זה אכן נורמה. היא נקראת הנורמה המושרת מהמכפלה הפנימית.
דוגמא: $V = \mathbb{C}^n$ עם מכפלה פנימית $<z,w> = z^t \bar{w}$
אזי הנורמה המושרת היא $||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$.

אי שיוון קושי שוורץ:

יהי V ממ"פ.
אזי לכל $x,y \in V$ מתקיים $|<x,y>| \leq ||x|| \cdot ||y||$. כאשר $||\cdot||$ הינה הנורמה המושרת.
הוכחה: יהיו $x,y \in V$ אם $x=0$ או $y=0$ טריוואלי כי שני הצדדים שווים ל־0 .
לכן נניח $x,y \neq 0$. נגדיר $\mu = \lambda <x,y>$. כאשר $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x+\mu y||^2 = <x+\mu y, x+\mu y> = \\ &= <x,x> + \mu <y,x> + \bar{\mu} <x,y> + \mu\bar{\mu} <y,y> \\ &= ||x||^2 + \lambda <x,y><y,x> + \overline{\lambda <x,y>} <x,y> + |\mu|^2 \cdot ||y||^2 \\ &= ||x||^2 + \lambda <x,y> \overline{<x,y>} + \lambda \overline{<x,y>} <x,y> + |\lambda <x,y>|^2 |y||^2 \\ &= ||x||^2 + 2\lambda |<x,y>|^2 + \lambda^2 |<x,y>|^2 ||y||^2 \end{aligned}$$

קיבלנו פולינום מדרגה 2 (λהמשתנה) שגדול שווה 0 ולכן הוא נמצא מעל ציר x (ייתכן שנוגע בו) ולכן יש לו לכל היותר שורש אחד. (תזכורת עבור פולינום $ax^2+bx+c=0$ השורשים שלו הן $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ואם יש לו לכל היותר שורש אחד אזי $b^2-4ac \leq 0$). במקרה שלנו $4|<x,y>|^4 - 4||x||^2||y||^2|<x,y>|^2 \leq 0 \Leftarrow |<x,y>|^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0$
$\Leftarrow |<x,y>| \leq ||x||||y||$ ■

תרגיל: יהיו $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$.
פתרון: נסתכל ב $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x = (a_1, \dots a_n)$, $y = (1, \dots, 1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $|<x,y>|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ כלומר $|(a_1 + \cdots + a_n)^2| \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$.■

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי Vממ"פ (עם נורמה מושרת). $v,u \in V$ $S \subset V$ תת קבוצה.

1. הזווית בין vל u מוגדרת להיות $\cos(\theta) := \frac{<u,v>}{||u|| \cdot ||v||}$.
2. v,u יקראו ניצבים/מאונכים/אורתוגונאליים אם $<v,u> = 0$ (מסומן $v \perp u$).

3. S תקרא אורתוגונלית אם כל שני וקטורים ב S ניצבים זה לזה.

4. התת מרחב הניצב ל Sמוגדר להיות $S^{\perp} := \{v \in V \,|\, \forall u \in S : < v, u >= 0\}$.
(תרגיל $S^{\perp}$ הינו תת מרחב. תרגיל: $S^{\perp} = [span(S)]^{\perp}$)

5. v יקרא נורמלי אם $||v|| = 1$ (הגודל שלו 1).

6. עבור $v \neq 0$ התהליך/מעבר $v \to \frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול (תרגיל: הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1) .

7. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגנליים וכל וקטור ב Sהוא נורמלי.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $[R(A)]^{\perp} = N(A)$

הוכחה: ($\supseteq$)יהא $x \in N(A)$. $\Leftarrow$ $Ax = 0$. כלומר $x = 0$ $\begin{pmatrix} - & \vec{R_1(A)} & - \\ - & \vdots & - \\ - & \vec{R_m(A)} & - \end{pmatrix}$ ולכן לכל i $0 = R(A) \cdot x =< R_i(A), x > \Leftarrow$ $x \in [R(A)]^{\perp}$.

($\subseteq$) יהא $x \in [R(A)]^{\perp}$. אזי לכל i $< R_i(A), x >= R_i(A) \cdot x = 0 \Leftarrow Ax = 0$. $\Leftarrow$ $x \in N(A)$.

תרגיל: יהיו $\mathbb{R} \ni u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $S = \{u, v\}$ מצא בסיס ל $S^{\perp}$

פתרון: נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow S^{\perp} = N(A)$ (לפי תרגיל קודם) . נדרג $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נציב $y = t$ ונקבל $N(A) = \{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ובסיס הוא $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

הערה: הוכחתם כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולכן היה צפוי שמספר האיברים בבסיס של $N(A)$ הוא 1