

מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 1†‡

1. מצאו, לכל אחד מהבאים, שני מספרים שלמים n, m כך ש-

$$\gcd(21, 77) = 21m + 77n \quad (\text{א})$$

$$\gcd(3456, 150) = 3456m + 150n \quad (\text{ב})$$

$$\gcd(30, 455) = 30m + 455n \quad (\text{ג})$$

2. הוכיחו שאם d הוא מחלק משותף של a ו- b (כולם מספרים שלמים) אז $d = (a, b)$ א.ס.ס. $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

3. חשבו, לפי האלגוריתם של אוקלידס, את $\gcd(840, 575)$.

4. הוכיחו את הטענות הבאות. כל המשתנים הם מספרים שלמים.

(א) אם $d = \gcd(a, b)$ אז לכל x המקיים $x | a \wedge x | b$ מתקיים $x | d$.

(ב) $\gcd(ab, ac) = a \cdot \gcd(b, c)$. (בעזרת סעיף א).

(ג) אם $(a, b) = d$ אזי $2d | (a + b, a - b)$.

(ד) $\gcd(a, bc) | \gcd(a, b) \cdot \gcd(a, c)$.

5. הוכיחו כי לכל שלושה מספרים שלמים a, b, c אם $a | c, b | c$ וגם $\gcd(a, b) = 1$ אזי $ab | c$.

6.

(א) מצאו x שלם חיובי כך ש- $17x \equiv 1 \pmod{53}$.

(ב) מצאו a שלם כך ש-

$$a \equiv 1 \pmod{11}$$

$$a \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a \equiv 4 \pmod{5}$$

* נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.
† יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת תולדות.

‡ לתשומת לבכם, אנו מסמנים את המחלק המשותף המקסימלי, מ.מ.מ., הן בסימון $\gcd(a, b)$ והן בסימון (a, b) .