בשיעור שעבר ניגנו לפתח את משוואת הרמיט $y'' - 2xy' + cy = 0$ בעזרת טור החזקות $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. קיבלנו את הרקורסיה הבאה, ולאחר משחקים עם האינדקסים $a_{n+2} = \frac{2n-c}{(n+2)(n+1)} a_n$. נציב קצת nים:

$$\begin{aligned}
n=0 &\qquad a_2 = \frac{-c}{2\cdot 1} a_0 \\
n=1 &\qquad a_3 = \frac{2-c}{3\cdot 2} a_1 \\
n=2 &\qquad a_4 = \frac{4-c}{4\cdot 3} a_2 = \frac{4-c}{3\cdot 4}\cdot\frac{-c}{2\cdot 1} a_0 \\
n=3 &\qquad a_5 = \frac{6-c}{5\cdot 4} a_3 = \frac{6-c}{5\cdot 4}\cdot
\end{aligned}$$

ניתן לראות שהאיברים עם אינדקס זוגי a_{2n} יהיו כפולה של a_0, והאיברים עם אינדקס אי זוגי a_{2n+1} יהיו כפולה של n_1. (a_0, a_1) חופשיים, כלומר הפתרון מקבל צורה

$$y - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... =$$

$$= a_0 \left(1 + \frac{-c}{2\cdot 1} + \frac{(4-c)(-c)}{4!} + ...\right) + a_1 \left(x + \frac{2-c}{3\cdot 2} x^3 + \frac{(6-c)(2-c)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} x^5 + ...\right)$$

אם הקבוע c מהמשוואה הוא מספר מהצורה $2p$ נקבל שאחד הטורים טור <u>סופי</u>(מה שנקרא פולינום)

למשל

- אם $c = 0$ כלומר $p = 0$ הפתרון הזוגי נהיה

$$a_0 \left(1 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^4 + ...\right)$$

שזהו פולינום ממעלה 0.

- $c = 2\cdot 3 = 6$, $p = 3$ אז הפתרון האי זוגי יהיה

$$a_1 \left(x + \frac{2-6}{2\cdot 3} x^3 + 0\right) = a_1 \left(x - \frac{2}{3} x^3\right)$$

שזה פולינום ממעלה 3.

- אם $c = 2\cdot 2$ הפתרון הזוגי יהיה

$$a_0 \left(1 - \frac{4}{2} x^2 + 0\right) = a_0 - 2a_0 x^2$$

שזהו פולינום ממעלה 2

קיבלנו פתרונות פולינומיים שונים עבור ערכים שונים של p:

$$\begin{array}{ll} p=0 & a_0 \\ p=1 & a_1 x \\ p=2 & -2a_0 x^2 + a_0 \\ p=3 & -\frac{2}{3}a_1 x^3 + a_1 x \end{array}$$

אלא עוד לא ממש פולינומים "הרמיט" הידועים. המקדם של החזקה הגבוהה בכל פולינום צריך להיות 2^p.

- אם ניקח עבור $p=0$ את a_0להיות $2^0=1$ נקבל את פולינום הרמיט הראשון $H_0\left(x\right)=1$.
- אם ניקח עבור $p=1$ את $a_1=1$ להיות q' נקבל את פולינום הרמיט השני $H_1\left(x\right)=2x$.
- עבור $p=2$ ניקח $a_0=-2$ ונקבל $H_2\left(x\right)=4x^2-2$
- ועבור $p=3$ ניקח $a_1=-12$ ונקבל $H_3\left(x\right)=8x^3-12x$

הגדרה

$H_p\left(x\right)$ נקרא פולינום הרמיט ממעלה p.
לא חישבנו את כולם, כמובן, אבל ישנן נוסחאות מפורשות עבור $H_p\left(x\right)$לכל $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

הקשר בין משוואת אוילר למד"ר עם מקדמים קבועים

משוואת אוילר מסדר n היא

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left(x-x_0\right)^k y^{(k)}\left(x\right)=\begin{cases}0 & homogeneous\\ b\left(x\right) & non-homogeneous\end{cases}$$

בד"כ x_0 יהיה אפס.[1]
ע"י הצלבה $x=e^t$ ($t=\ln x\Leftrightarrow$) ניתן להפוך את משוואת אוילר למד"ר לינארית מסדר n עם מקדמים קבועים.

[1] הערה: נהוג לבחור את משוואת אויילר בתחום x_0 חיובי

דוגמה

פתור את משוואת אויילר

$$\frac{x^2d^2}{dx^2}y-3x\frac{dy}{dx}+3y=0$$

(א) בעזרת הניחוש $y=x^{\lambda}$

(ב) בעזרת החלפת המשתנים $x=e^t\Leftrightarrow t=\ln x$

פתרון

(א) נגדיר

$$y=x^{\lambda}$$

$$y'=\lambda x^{\lambda-1}$$

$$y''=\lambda\left(\lambda-1\right)x^{\lambda-2}$$

$$x^2\cdot\lambda\left(\lambda-1\right)x^{\lambda-2}-3x\lambda x^{\lambda-1}+3x^{\lambda}=0$$

$$\lambda\left(\lambda-1\right)x^{\lambda}-3\lambda x^{\lambda}+3x^{\lambda}=0$$

$$x^{\lambda}\left(\lambda^2-\lambda-3\lambda+3\right)=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$0=16-4\cdot3=4$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm2}{2}=1,3$$

כלומר קיבלנו 2 פתרונות מהניחוש, $y_1=x^3$ ו-$y_2=x^1$, והפתרון הכללי הוא צ"ל של שניהם:

$$\boxed{y=C_1x^3+C_2x}$$

(ב) נשתמש בכלל השרשרת

$$\frac{d}{dx}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}=\frac{1}{e^t}\cdot\frac{d}{dt}=e^{-t}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}=\left(\frac{d}{dx}\right)^2=\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right)\cdot\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right)=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right)=e^{-t}\left[e^{-t}\frac{d}{dt}+e^{-t}\frac{d^2}{dt^2}\right]=e^{-2t}\left[\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d}{dt}\right]$$

[תזכורת $(f\cdot g)'=f'g+fg'$]
נחזור למד"ר:

$$x^2\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]-3x\cdot e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}+3y=0$$

$$x=e^t\Rightarrow xe^{-t}=e^t\cdot e^{-t}=e^0=1$$

תזכורת: נהוג לסמן גזירה ע"פ t ע"י dt.
מקבלים

$$y''-4y'+3y=0$$

זוהי מד"ר במקדמים קבועים עבור y כפונקציה של t. המשוואה המאפיינת היא $\lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftarrow \lambda_{1,2}=1,3$. הפתרון הוא

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^t$$

$$y=C_1e^{3\ln x}+C_2e^{1\ln x}=C_1\left(e^{\ln x}\right)^3+C_2\left(e^{\ln x}\right)^1=C_1x^3+C_2x$$

שיטת פרוביניוס

אם למד"ר $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ יש נקודה רגולרית סינגולרית בנק. $x=x_0$.
נחפש פתרון בצורה

$$y=(x-x_0)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+\alpha}$$

כאשר $a_0\neq 0$, כלומר לא מתקיים $P(x),Q(x)$ רציפות בx_0 אבל הפונ' $(x-x_0)P(x)$ ו$(x-x_0)^2Q(x)$ אנליטיות בסביבת x_0.

השוואת המקדם של החזקה הנמוכה של $(x-x_0)$ לאפס תיתן לנו משוואה ריבועית בα. משוואה זו נקראת המשוואה האינדנציאלית. המקרה הכי פשוט הוא המקרה שבו מקבלים שני שורשים ממשיים שונים $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ שההפרש ביניהם לא שלם($\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{Z}$)

לדוגמה

$$4xy''+2y'+y=0$$

פתרון

נעביר לצורה נורמלית ונחלק ב$4x$:

$$y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{y}{4x}$$

הנק. $x=0$ היא נק. רגולרית סינגולרית.

$$x\cdot P\left(x\right)=\frac{1}{2}\quad Analytic$$

$$x^{2}Q\left(x\right)=\frac{1}{4}x\quad Analytic$$

נחפש פתרון $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+\alpha}$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha\right)a_{n}x^{n+\alpha-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha-1\right)\left(n+\alpha\right)a_{n}x^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר המקורית

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha-1\right)\left(n+\alpha\right)a_{n}x^{n+\alpha-2}\cdot4x+\sum_{n=0}^{\infty}2\left(n+\alpha\right)a_{n}x^{n+\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

נוציא $n=0$ מחוץ לסיגמא

$$\left[4\left(\alpha-1\right)xa_{0}+2\alpha a_{0}\right]x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}...+\sum_{n=1}^{\infty}...+\sum_{n=0}^{\infty}...$$

(והטריק: $\sum\limits_{n=n_{0}}^{\infty}a_{n}=\sum\limits_{n=n_{0}\pm k}^{\infty}a_{n\mp k}$)

$$\left[\left(4\alpha^{2}-4\alpha\right)a_{0}+2\alpha a_{0}\right]x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[4\left(n+\alpha+1\right)\left(n+\alpha\right)a_{n+1}x^{n+\alpha}+2\left(n+a+1\right)a_{n+1}+a_{n}\right]x^{n+\alpha}\overset{!}{=}0$$

$$\Downarrow$$

$$a_0\left[4\alpha^2-4\alpha+2\alpha\right]=0$$

$4\alpha^2-2=0$ היא המשוואה המציינת, ו $\boxed{\alpha_{1,2}=0,\frac{1}{2}}$

$$\left[4\left(n+\alpha+1\right)\left(n+\alpha\right)+2\left(n+\alpha+1\right)\right]a_{n+1}=-a_n$$

$$\boxed{a_{n+1}=\frac{-\,a_n}{2\left(n+\alpha+1\right)\left(2n+2\alpha+1\right)}}$$

$$a_{n+1}=\frac{-\,a_n}{2\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}=\frac{-\,a_n}{\left(2n+2\right)\left(2n+1\right)}$$

נשחק קצת:

$$\begin{aligned}
n&=0 \qquad a_1=\frac{-\,a_0}{1\cdot 2}\\
n&=1 \qquad a_2=\frac{-\,a_1}{3\cdot 4}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\\
n&=2 \qquad a_3=\frac{-\,a_2}{5\cdot 6}=\frac{-\,a_0}{6!}
\end{aligned}$$

אפשר לראות:

$$a_n=\frac{\left(-1\right)^n a_0}{\left(2n\right)!}$$

נקבל פתרון

$$x^\alpha\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\cdot a_0}{\left(2n\right)!}x^n$$

קיבלנו פתרון:

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}\cdot x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}\cdot\sqrt{x}^{2n}\boxed{=a_0\cdot\cos\sqrt{x}}$$

עבור $\alpha=\frac{1}{2}$ מתקבל פיתרון נוסף:

$$y_2=a_1\cdot\sin\sqrt{x}$$

הפתרון הכללי הוא צ"ל:

$$y=C_1y_1+C_2y_2=\boxed{C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}}$$

הסבר עבור $\alpha = \frac{1}{2}$: הרקורסיה

$$a_{n+1} = \frac{-\, a_n}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)(2n+2)} = \frac{-\, a_n}{(2n+2)\,(2n+3)}$$

מקבלים פתרון נוסף

$$x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot a_0}{(2n+1)!}\cdot x^n = a_0\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$