תרגיל בית 10 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות תרגיל זה לא להגשה, אך כולל חומר שצריך לדעת.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 12 עד כדי איזומורפיזם.

שאלה 2. מצאו סדרת הרכב של D_4. אפשר להעזר בסריג תת־החבורות של D_4 שפגשנו בתרגיל בית 7 כדי למצוא את כל סדרות ההרכב של D_4.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. הוכיחו כי $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$ כאשר n אי-זוגי.

שאלה 4. נתונות שש חבורות מסדר 54. זהו ונמקו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$U_7 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times U_{18}, \quad \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{54}$$

נסו למצוא איזומורפיזמים מפורשים בין חלק מהחבורות.

שאלה 5.

א. מצאו כמה חבורות אבליות יש מסדר $6!$, עד כדי איזומורפיזם.

ב. לכמה מהחבורות האבליות מסדר $6!$ יש תת־חבורה 3-סילו ציקלית?

שאלה 6. רמז: $5! = 120$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 120 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 היא לא פשוטה. רמז: בדקו מתי $n_5 = m \neq 1$, הסתכלו על העתקה $G \to S_m$ והאם היא לתוך A_m.

שאלה 7. רמז: $5778 = 2 \cdot 3^3 \cdot 107$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 5778 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 5778 היא לא פשוטה.

שאלה 8. תהי $G = D_5 \times U_7$.

א. מצאו את תת־חבורת הקומוטטור G'.

ב. האבליניזציה $\overline{G} = {}^{G}/_{G'}$ היא חבורה אבלית סופית. מצאו את הצורה הקנונית שלה, כלומר מצאו מספרים d_i כך ש-$\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ כאשר $d_i | d_{i+1}$.

שאלה 9. תהי G חבורה מסדר $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. נסמן ב-H_p תת־חבורה p-סילו של G.

א. הוכיחו כי $H_7, H_{11} \lhd G$.

ב. הוכיחו כי $H_7 \subseteq Z(G)$. רמז: משפט N/C.

ג. הוכיחו כי או ש-$Z(G) = H_7$ או ש-G ציקלית.

שאלה 10. תהי $\mathcal{V}$ המחלקה של כל החבורות הפתירות.
רשות: אפשר לפתור את השאלה גם עבור המחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות.

א. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתת־חבורות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $H \leq G$ גם $H \in \mathcal{V}$.

ב. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתמונות הומומורפיות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $K \lhd G$ גם ${}^{G}/_{K} \in \mathcal{V}$.

ג. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה למכפלה ישרה סופית. כלומר אם $G, H \in \mathcal{V}$, אז גם $G \times H \in \mathcal{V}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 11. הוכיחו שאם לשתי חבורות אבליות סופיות יש את אותו מספר איברים מכל סדר, אז הן איזומורפיות.
רמז: למעשה צריך להראות שמספר האיברים מכל סדר קובע באופן יחיד חבורה אבלית סופית. התבוננו בצורה הקנונית של חבורה אבלית, או העזרו בתת־חבורות סילו שלה.

שאלה 12. תהי G חבורה פתירה. נגדיר את דרגת הפתירות של G להיות המספר $t \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G^{(t)} = \{e\}$.
באופן דומה מגדירים לחבורה נילפוטנטית את דרגת הנילפוטנטיות שלה להיות המספר $c \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G_c = \{e\}$ (האיבר ה-c בסדרה המרכזית היורדת).
לדוגמה, חבורה מדרגת פתירות 1 או דרגת נילפוטנטיות 1 היא אבלית, כי $G^{(1)} = \{e\} = G_1$.

א. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הפתירות של D_n היא 2.

ב. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הנילפוטנטיות של D_{2^n} היא $n-1$.

ג. הראו שהמחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות לא סגורה למכפלה ישרה אינסופית.

בהצלחה!