

תרגול כיתה 7 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
התפלגויות רציפות מיוחדות, תוחלת ושונות, פונקציה יוצרת מומנטים
 מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות

(1) התפלגות אחידה רציפה $X \sim U(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

התוחלת והשונות: $E(X) = \frac{\beta + \alpha}{2}$ $V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$

(2) התפלגות מעריכית $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

התוחלת והשונות: $E(X) = 1/\lambda$ $V(X) = 1/\lambda^2$

הערה: בהתפלגות זו (בדומה להתפלגות הגיאומטרית) קיימת תכונת "חוסר הזכרון":
 $P(X = s + t | X = t) = P(X = s)$, לכל $s, t \geq 0$.

(3) התפלגות גמה $X \sim \text{Gamma}(\lambda, \alpha)$, $\lambda, \alpha > 0$.

פונקציית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

התוחלת והשונות: $E(X) = \alpha/\lambda$ $V(X) = \alpha/\lambda^2$

חישוב פונקציית גמה: כאשר α טבעי $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$,

אחרת $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

תרגיל 1

אדם מגיע לתחנת אוטובוס בשעה 10:00. ידוע כי האוטובוס יגיע ברגע כלשהו בין 10:00 ל-10:30.

א. מהי ההסתברות שיצטרך להמתין למעלה מ-10 דקות?

ב. אם עד 10:15 לא הגיע האוטובוס, מה הסיכוי שיצטרך עדיין להמתין עוד 10 דקות?

תרגיל 2

משך הזמן (בשעות) הדרוש לתיקון מכונה הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

א. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על שעתיים.

ב. חשב את ההסתברות שזמן התיקון יעלה על 10 שעות בהינתן שהוא מעל 9 שעות.

ג. מהי תוחלת זמן התיקון?

תרגיל 3

אדם קולע למטרה. פגיעה במרחק שאינו עולה על 1 מ"מ ל-3 מ"מ מזכה אותו ב-10 נקודות, פגיעה במרחק שבין 1 מ"מ ל-3 מ"מ מזכה אותו ב-5 נקודות, ופגיעה במרחק שבין 3 מ"מ ל-5 מ"מ מזכה אותו ב-3 נקודות. מצא תוחלת מספר הנקודות שצבר, אם למרחק בין המטרה לנקודה שבה פגע יש התפלגות גמה עם הפרמטרים $\alpha = 2$ ו- $\lambda = 1/3$.

תוחלת ושונויות מותנה, תוחלת ושונויות נשנית, שונויות משותפת ומתאםנוסחאות

תוחלת מותנה:

$$E(X | Y = y) = \sum_x x P(X = x | Y = y) = \sum_x x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

תוחלת נשנית:

$$E(X) = E(E(X | Y)) = \sum_y E(X | Y = y) \cdot P(Y = y)$$

שונויות נשנית:

$$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(E(Y | X))$$

4 תרגיל

יואב וחנן זורקים לסל כדורים לסירוגין. יואב קולע בסיכוי 0.7 וחנן בסיכוי 0.4.

חנן מתחיל. המשחק נעצר כאשר חנן קולע ראשון.

א. מהי תוחלת מספר הקליעות של יואב בזמן זה?

ב. מהי השונויות?

5 תרגיל

במשחק מזל מטילים קוביה הוגנת פעם אחת. תהי N תוצאת ההטלה. כעת מטילים מטבע N

פעמים המטבע שמצידו האחד חקוק "1" ומצידו האחר "0". הסתברויות הטלת המטבע C

הן: $p \in (0,1)$, $P(C=1) = p$, $P(C=0) = 1-p$. הרווח בכל הטלת

המטבע היא תוצאת ההטלה. מהי תוחלת סה"כ הרווח במשחק ומהי שונויותו?

6 תרגיל

מטילים מטבע הוגן n פעמים $\Omega = \{H, T\}^n$. נגדיר: X – מס' הפעמים שהתקבל "H",

Y – מס' הפעמים שהתקבל "T". חשב את המתאם $\rho(X, Y)$.

פונקציה יוצרת מומנטים

פונקציה יוצרת מומנטים – הגדרה:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

שימושי פונקציה יוצרת מומנטים:

1. יצירת המומנט מסדר r ($r=1,2,3,\dots$) של X :

$$\left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = E(X^r)$$

הערה – מומנט ראשון: הוא התוחלת; מומנט שני: מגדיר את השונות ומאפשר חישובה.

2. פונקציה יוצרת מומנטים מגדירה באופן חד-חד-ערכי התפלגות. כלומר, לכל התפלגות

יש רק פונקציה יוצרת מומנטים יחידה. לכן בשאלות של זיהוי התפלגות ניתן לחשב את

פונקציה יוצרת המומנטים המתאימה.

3. יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי תלויים עם פונקציות יוצרות מומנטים,

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) \text{ , בהתאמה, אזי } M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$$

בפרט, לשני משתנים X ו- Y בלתי תלויים: $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ שאלה 7יהי X משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו- p .

א. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים שלו.

ב. חשב בעזרת הפי"מ את התוחלת ואת השונות של X .ג. יהיו $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$, $Z \sim \text{Bin}(k, p)$. X, Y, Z ב"ת.מהי ההתפלגות של המ"מ W , השווה לסכום $W=X+Y+Z$.שאלה 8נתון $X \sim N(0,1)$.א. חשב את הפונ' יוצרת המומנטים של המ"מ $Y = Z^2$.ב. יהיו Y_1, Y_2, \dots, Y_n סדרת מ"מ ב"ת ושווי התפלגות כפי שהוגדר בסעיף א'.

$$W = \sum_{i=1}^n Y_i \text{ של ההתפלגות}$$