תרגיל 9

1. הוכיחו/הפריכו:

(א) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$.
הפרכה: אין להם את אותה עוצמה, וטלכן לא יכולה להיות בניהם פונקציה חח"ע ועל.

(ב) $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)\cup\{0\}$.
הפרכה: אם נוריד מהמרחב הימני את הנקודה 0 נקבל מרחב קשיר. ואילו במרחב השמאלי, שום נקודה שנוריד לא תהפוך את המרחב לקשיר. לכן הם לא הומיאומורפיים.

2. יהי X מרחב טופולוגי עם התכונה שלכל נקודה בX יש סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל רכיב קשירות מסילתית הוא פתוח. הסיקו שכל רכיב קשירות מסילתית הוא גם סגור.
פתרון:

יהי A רכיב קשירות מסילתי, ו$x\in A$. נתון שלx יש סביבה פתוחה O שהיא קשירה מסילתית. לכן $O\subseteq A$. כלומר, לכל $x\in A$ יש סביבה שמוכלת בA. נובע מזה שA פתוח. (למשל, כי A שווה לאיחוד הסביבות האלו ולכן A שווה לאיחוד של קבוצות פתוחות). כעת, קיבלנו שכל רכיב קשירות מסילתית הוא פתוח. ידוע שX שווה לאיחוד כל רכיבי הקשירות המסילתית, וכמובן שזה איחוד זר. $X=\bigcup A_i$. אז יהי A_j רכיב קשירות מסילתית, $A_j^c=\bigcup_{i\neq j}A_i$. זהו איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוח. קיבלנו שA_j סגור.

3. הוכיחו:

(א) מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"ם הוא סופי.
הוכחה:

יהי X מרחב טופולוגי דיסקרטיץ אם הוא סופי, אז הוא קומפקטי, כי למעשה כל מרחב סופי הוא קומפטי. אחרת, X אינסופי. יש לו כיסוי פתוח מהצורה $\{\{x\}_{x\in X}\}$, כלומר אוסף כל הנקודונים. זהו כיסוי פתוח, כי כל נקודון פתוח. אולם, קל לראות שאין לו תת כיסוי סופי. לכן X אינו קומפקטי.

(ב) יהי X מרחב קומפקטי, ו$\{F_i\}$ אוסף של קבוצות סגורות, כך שהחיתוך של כל מספר סופי מתוכם אינו ריק. הוכיחו ש $\bigcap F_i\neq\emptyset$.
הוכחה:

נניח בשלילה ש $\bigcap F_i=\emptyset$. אזי $\bigcup F_i^c=(\bigcap F_i)^c=\emptyset^c=X$. כלומר, $\{F_i^c\}$ הוא כיסוי פתוח של X. (הוא כיוסי פתוח מכיוון שמשלים של קבוצה סגורה היא קבוצה פתוחה). מקומפקטיות, יש מספר סופי של קבוצות מהאוסף

שמכסות את X. כלומר, $F_{i_1}^c \cup ... \cup F_{i_n}^c = X$. אבל שוב, מדה מורגן נקבל ש $F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} = \emptyset$. וזה סתירה לנתון.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי ו$A_1, ..., A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים. הוכיחו ש $A_1 \cup ... \cup A_n$ קומפקטי.
יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של $A_1 \cup ... \cup A_n$. כלומר, $A_1 \cup ... \cup A_n \subseteq \bigcup O_i$. בפרט, לכל $1 \leq j \leq n$, $A_j \subseteq \bigcup O_i$. מכיוון ש$A_j$ קומפקטי, יש לו תת כיסוי סופי $O_{i_{j_1}}, ... O i_{j_{n_j}}$. אם ניקח את כל הקבוצות שמשתתפות בתתי כיסויים הסופיים של $A_1, ..., A_n$ נקבל תת כיסוי סופי של $A_1 \cup ... \cup A_n$.

(ב) תנו דוגמא נגדית עבור איחוד אינסופי.
פתרון:
יהי X מרחב לא קומפקטי (למשל דיסקרטי אינסופי). נשים לב שהוא חייב להיות אינסופי (כי כל מרחב סופי קומפקטי.) כל נקודון הוא קומפקטי כמרחב סופי. אבל איחוד אינסופי של כל הנקודונים בX שווה לX, והוא לא קומפקטי.

(ג) יהי X מ"ט האוסדורף, ו$\{F_i\}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים. הוכיחו ש$\bigcap F_i$ קומפקטי.
הוכחה:
X האוסדורף, ולכן כל קומפקטי הוא סגור. אז $\cap F_i$ הוא קבוצה סגורה, כחיתוך כלשהו של סגורות. $\cap F_i \subseteq F_1$. F_1 קומפקטי, וידוע שכל תת קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית. לכן $\cap F_i$ קומפקטי.

5. יהי X, Y מרחבים טופולוגיים ו$f : X \to Y$ חח"ע ועל.

(א) הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה וX האוסדרוף אז Y האוסדורף.
הוכחה:
יהיו $x \neq y \in Y$. מכיוון שf חח"ע על, $f^{-1}(x)$ ו$f^{-1}(y)$ מוגדר היטב. (לכל איבר יש בדיוק מקור אחד.) נשים לב שאם f חח"ע ועל, אז f פתוחה אמ"ם f סגורה. (כי כאשר f חח"ע ועל, $f(A^c) = f(A)^c$.)
נניח שf פתוחה. X האסדורף ולכן יש סביבות פתוחות זרות $f^{-1}(x) \in U$, $f^{-1}(y) \in V$. תמונה של פתוחה היא פתוחה ולכן $f(U)$ ו$f(V)$ הן סביבות פתוחות של x וy בהתאמה. כמו כן, מכיוון שf חח"ע, הן זרות. מש"ל.

(ב) הוכיחו שאם f רציפה וY האוסדורף אז X האוסדורף.
הוכחה:
יהיו $x \neq y \in X$. מהחח"ע, $f(x) \neq f(y)$. Y האוסדורף, ולכן יש U וV סביבות פתוחות של $f(x)$ ו$f(y)$ בהתאמה, כך ש$U \cap V = \emptyset$. מרציפות f, $x \in f^{-1}(U)$ פתוחה, ו$y \in f^{-1}(V)$ פתוחה. כמו כן, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. כלומר, מצאנו סביבות מפרידות לx וy.

6. יהי X מרחב טופולוגי ויהי $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq ...$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים. הוכיחו ש $\bigcap E_i \neq \emptyset$. תנו דוגמא נגדית במקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.
הוכחה:

מכיוון שהמרחבים מוכלים זה בזה, חיתוך של מספר סופי מתוכם יתן את הקבוצה בעלת האינדקס הכי קטן. (למשל: $E_1 \cap E_4 \cap E_7 = E_7$). אז המסקנה נובעת מיידית מ3 ב'.

דוגמא כשאינם קומפקטיים: ב$\mathbb{R}$ נסתכל על הקבוצות $E_n = (0, \frac{1}{n})$. אז ברור ש$E_1 \supseteq E_2 \supseteq ...$, וכן קל לראות ש $\bigcap E_n = \emptyset$.

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו שX אינו האוסדורף.

הוכחה:

נניח בשלילה שX האוסדורף. ידוע שבמרחב האוסדוף, כל תת מרחב קומפקטי הוא סגור. אז נקבל שכל תת קבוצה של X היא סגורה. זה אומר שכל תת קבוצה פתוחה, כלומר, הטופולוגיה דיסקרטית. אבל מרחב דיסקרטי אינסופי אינו קומפקטי. בסתירה לכך שכל תת מרחב הוא קומפקטי.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפטי. הוכיחו שקיים בX מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים, ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.

הוכחה:

כל נקודון הוא קומפקטי, ובX יש מספר לא בן מניה של נקודונים.

כעת, נקח את המשלים של כל נקודון. יש מספר לא בן מניה של כאלה. נוכיח שלכל $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ הוא לא קומפקטי. אם הוא היה קומפקטי, אז מתרגיל 4 א', $X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ היה קומפקטי. בסתירה לנתון.

(ג) יהי X מרחב טופולוגי כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו שX קומפקטי.

הוכחה:

יהי $\{O_i\}$ כיסוי פתוח של X. נסתכל על O_1. אם $O_1 = X$, סיימנו, כי אז $\{O_1\}$ הוא תת כיסוי סופי. אחרת, $X \setminus O_1$ קבוצה סגורה לא ריקה, ולכן קומפקטית, מהנתון. $\{O_i\}$ מהווה כיסוי פתוח גם של $X \setminus O_1$. לכן, יש תת כיסוי סופי $\{O_{i_1}, ...O_{i_n}\}$ של $X \setminus O_1$. אז $\{O_1, O_{i_1}, ..., O_{i_n}\}$ הוא תת כיסוי סופי של X. מש"ל.