אינפי 1 תרגיל 5

להגשה בשבוע שמתחיל בי"ח כסלו, 18.12

16 בדצמבר 2016

1. מצא את $\frac{dy}{dx}$ עבור הפונקציות הבאות. התשובה יכולה לכלול את x, y.

א. $yx^2 - x + 2y = 1$.

ב. $e^{2x} = y^2 + \tan(xy)$.

ג. $y^3 = \ln(5x - 7y)$.

פיתרון

א.
$$\Longleftarrow \frac{d(x^2)}{dx}y + \Longleftarrow \frac{d(yx^2)}{dx} - \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(2y)}{dx} = 0 \Longleftarrow \frac{d(yx^2 - x + 2y)}{dx} = \frac{d(1)}{dx}$$
$$\Longleftarrow \frac{dy}{dx}(2 + x^2) = 1 - 2xy \Longleftarrow 2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 1 + 2\frac{dy}{dx} = 0 x^2\frac{dy}{dx} - 1 + 2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{2 + x^2}.$$

ב.
$$\Longleftarrow \Longleftarrow 2e^{2x} = 2y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot (y + x\frac{dy}{dx}) \Longleftarrow \frac{d(e^{2x})}{dx} = \frac{d(y^2 + \tan(xy))}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}}{2y + \frac{x}{\cos^2(xy)}} 2e^{2x} - \frac{y}{\cos^2(xy)} = 2y\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\cos^2(xy)} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

ג.
$$\Longleftarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = \Longleftarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5x - 7y} \cdot \frac{d(5x - 7y)}{dx} \Longleftarrow \frac{dy^3}{dx} = \frac{d(\ln(5x - 7y))}{dx}$$
$$\Longleftarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 + \frac{7}{5x - 7y}) = \Longleftarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x - 7y} - \frac{7}{5x - 7y}\frac{dy}{dx}\frac{1}{5x - 7y}(5 - 7\frac{dy}{dx})$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{5x - 7y}}{3y^2 + \frac{7}{5x - 7y}} \frac{5}{5x - 7y}.$$

2. מצא את שיפוע הפונקציה $y = \sqrt{xy + 1}$ בנקודה $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$.

פיתרון

ראשית נמצא את $\frac{dy}{dx}$:

$$\Longleftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{xy+1}}\frac{dy}{dx} + \Longleftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy+1}}\frac{d(xy+1)}{dx} \Longleftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{xy+1})}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Longleftarrow \frac{dy}{dx}(1 - \frac{x}{2\sqrt{xy+1}}) = \frac{y}{2\sqrt{xy+1}}\,\frac{y}{2\sqrt{xy+1}} \Longleftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{xy+1}}(x\frac{dy}{dx} + y)$$

$$.\ \frac{\frac{y}{2\sqrt{xy+1}}}{1 - \frac{x}{2\sqrt{xy+1}}}$$

נציב את הנקודה $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ונקבל שהשיפוע הוא:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1}}}{1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

3. חשב את הגבולות הבאים (במידה וקיימים):

א. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-17}{x^3+27}$.

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{17+8x^{-3}-x^{-1}}{5-2x^{-2}+3x^{-3}}$.

ג. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+\sqrt{2x+3\sqrt{x}}}$.

ד. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{8}-\sqrt{x}}{8-x}$.

ה. $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} x^2\sqrt{16x^{-4}-1}$.

ו. $\lim_{x\to c^-}\sqrt{c-x}$

פיתרון

א. אנחנו רוצים לחשב את $st(\frac{(-3+\triangle x)^2-17}{(-3+\triangle x)^3+27})$. אולם נקבל שהמונה סופי והמכנה אינפיניטיסימלי ולכן הביטוי כולו אינסופי ואין לו ערך סטנדרטי. כלומר, הגבול לא קיים.

ב. נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{17+8x^{-3}-x^{-1}}{5-2x^{-2}+3x^{-3}} = st(\frac{17+8\triangle x^{-3}-\triangle x^{-1}}{5-2\triangle x^{-2}+3\triangle x^{-3}}) = st(\frac{(17+8\triangle x^{-3}-\triangle x^{-1})\triangle x^3}{(5-2\triangle x^{-2}+3\triangle x^{-3})\triangle x^3}) =$$

$$st(\frac{17\triangle x^3+8-\triangle x^2}{5\triangle x^3-2\triangle x+3}) = \frac{st(17\triangle x^3+8-\triangle x^2)}{st(5\triangle x^3-2\triangle x+3)} = \frac{8}{3}$$

ג. נחשב:

$st(\sqrt{1+\triangle x+\sqrt{2(1+\triangle x)+3\sqrt{1+\triangle x}}})=\sqrt{st(1+\triangle x+\sqrt{2(1+\triangle x)+3\sqrt{1+\triangle x}})}=$
$\sqrt{1+st(\sqrt{2(1+\triangle x)+3\sqrt{1+\triangle x}})}=\sqrt{1+\sqrt{2\cdot st(1+\triangle x)+3\cdot st\sqrt{1+\triangle x}}}=$
$\sqrt{1+\sqrt{2+3\sqrt{1}}}=\sqrt{1+\sqrt{5}}$

ד. נחשב:

$st(\frac{\sqrt{8}-\sqrt{8+\triangle x}}{8-(8+\triangle x)})=st(\frac{8-8-\triangle x}{(8-8-\triangle x)(\sqrt{8}+\sqrt{8+\triangle x})})=st(\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{8+\triangle x}})=$
$.\ \frac{1}{st(\sqrt{8}+\sqrt{8+\triangle x})}=\frac{1}{2\sqrt{8}}$

ה. עבור $\triangle x>0$:

$st((\frac{1}{2}+\triangle x)^2\sqrt{16(\frac{1}{2}+\triangle x)^{-4}-1})=st(\sqrt{(\frac{1}{2}+\triangle x)^4}\sqrt{16(\frac{1}{2}+\triangle x)^{-4}-1}=$
$st\sqrt{16-(\frac{1}{2}+\triangle x)^4}=\sqrt{st(16-(\frac{1}{2}+\triangle x)^4)}=\sqrt{16-(st(\frac{1}{2}+\triangle x))^4}=\sqrt{16-\frac{1}{16}}$

ו.נחשב עבור $\triangle x<0$:

$st(\sqrt{c-(c+\triangle x)}=\sqrt{st(c-(c+\triangle x))}=\sqrt{c-st(c+\triangle x)}=\sqrt{c-c}=$
$\sqrt{0}=0$

שימו לב ש $\sqrt{c-(c+\triangle x)}$ מוגדר כי $\triangle x<0$.

4. תן דוגמא לפונקציה שאין לה גבול ב־ $x_0=\sqrt{e}$. הוכח תשובתך.

פיתרון

נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<\sqrt{e}\\ 2\pi & x\geq\sqrt{e}\end{cases}$$

קל לראות שהגבול הימני שווה ל־2π ואילו השמאלי ל־1. הגבולות החד צדדיים שונים לכן אין גבול.