# תרגול 12

16 באוגוסט 2020

## 1 מטריצות מייצגות - השלמה

1. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, ושני בסיסים:

$$B = \{2 + x, 3 - x + x^2, -2 + 4x - x^2\}, C = \{1 + x + x^2, 2 + 2x, x + 2x^2\}$$

ונסמן $S = \{1, x, x^2\}$, הבסיס הסטנדרטי.

(א) מצאו את מטריצות המעבר: $[I]_C^S, [I]_S^B, [I]_C^B, [I]_B^C$

פתרון:

$$[I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & & 1 & \\ 1 & 0 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2 & -2 & 1 \\ & 1 & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן:

$$[I]_C^B = [I]_C^S \cdot [I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -13 \\ 0 & -3 & 5.5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -13 \\ 0 & -3 & 5.5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 9 & -13 & 1 & & \\ 0 & -3 & 5.5 & & 1 & \\ -1 & -4 & 6 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 9 & -13 & 1 & & \\ 0 & -3 & 5.5 & & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 9 & -13 & 1 & & \\ 0 & -3 & 5.5 & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4.5 & -6.5 & 0.5 & & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{21}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{2}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

(ב) נגדיר $T : V \to V$ ע"י הכלל $T(p(x)) = p(x+1)$. מצאו את המטריצה $[T]_C^B, [T]_C^C$.

פתרון: נמצא תחילה את $[T]_S^S$:

$$T(1) = 1, T(x) = x+1, T(x^2) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

ולכן:

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נקבל:

$$[T]_C^B = [I]_C^S [T]_S^S [I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -0.5 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^C = [I]_C^S [T]_S^S [I]_S^C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: קיימת $\hat{T} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש

$$[\hat{T} \circ T]_C^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T \circ \hat{T}]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: לא! נמיר את השאלה לכפל מטריצות: לכל בסיס $E$ מתקיים:

$$[\hat{T} \circ T]_C^B = [\hat{T}]_C^E \cdot [T]_E^B$$

$$[T \circ \hat{T}]_B^C = [T]_B^E \cdot [\hat{T}]_E^C$$

ניתן לראות ש-$T$ העתקה הפיכה (אם ע"י מציאת ההעתקה ההופכית המפורשת $T^{-1}(p) = p(x-1)$, אם ע"י התבוננות בכך ש- $[T]_S^S$ הפיכה, וכיון שישנם בסיסים שהמטריצה המייצגת שלהם הפיכה אז ההעתקה הפיכה). כיון ש-$T$ הפיכה נקבל $[T]_B^E$ מטריצה הפיכה, ולכן אין לה מחלקי אפס, ולכן $[\hat{T}]_E^C = 0$, ולכן $\hat{T}$ היא העתקת האפס. ולכן

$$[\hat{T} \circ T]_C^B = [\hat{T}]_C^E \cdot [T]_E^B = 0 \cdot [T]_E^B = 0 \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ד) הוכיחו/הפריכו: קיימת $\hat{T} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש

$$[\hat{T} \circ T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T \circ \hat{T}]_S^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: לא! כיון שראינו ש-$T$ הפיכה, השורה הראשונה מלמדת ש- $\hat{T}$ לא הפיכה: הרכבת העתקות היא הפיכה אמ"ם המורכבות הפיכות, ע"י שימוש במטריצות שמייצגות את ההעתקות והמשפט שמכפלת מטריצות היא הפיכה אמ"ם המוכפלות הפיכות. ואז בשורה השנייה, מקבלים הרכבה של העתקה הפיכה ולא הפיכה, והתוצאה חייבת להיות לא הפיכה, ולכן אין בסיסים שהמטריצה המייצגת הפיכה, בסתירה.

(ה) מצאו לאילו ערכי $a$ קיימת $\hat{T} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש

$$[\hat{T} \circ T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix}$$

פתרון: אנחנו רוצים למצוא $\hat{T}$ כך ש־

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} = [\hat{T} \circ T]_C^B = [\hat{T}]_C^S [T]_S^B$$

וכיון ש־ $[T]_S^B$ הפיכה (שהרי $T$ הפיכה), נוכל להכפיל בהופכית ולקבל:

$$[\hat{T}]_C^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} \left([T]_S^B\right)^{-1}$$

כעת, לכל ערך של $a$ יש העתקה $\hat{T}$ המוגדרת לפי המטריצה המייצגת שלה.

## 2 דטרמיננטה

הדטרמיננטה של $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"פ הנוסחא:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

לדוגמא: ניזכר בתמוורת $S_3 = \{id, (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 20 & 6 \\ 9 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 1(1\cdot 20\cdot 9)+1(2\cdot 6\cdot 9)+1(3\cdot 3\cdot 4)-1(2\cdot 3\cdot 9)-1(3\cdot 20\cdot 9)-1(1\cdot 6\cdot 4) =$$

$$180 + 108 + 36 - 54 - 540 - 24 = -294$$

נחשב גם את הדטרמיננטה של המשוחלפת:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 20 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = (1\cdot 20\cdot 9)+(3\cdot 4\cdot 3)+(9\cdot 2\cdot 6)-(3\cdot 2\cdot 9)-(9\cdot 20\cdot 3)-(1\cdot 4\cdot 6) = -294$$

השפעת פעולות שורה על דטרמיננטה:

- החלפת שורות: הכפלת הדטרמיננטה ב $-1$.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

• כפל שורה בסקלאר: הכפלת הדטרמיננטה בסקלאר:

$$\det\begin{pmatrix}\alpha\cdot a & \alpha\cdot b & \alpha\cdot c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\alpha\det\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

• הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת: לא משנה את הדטרמיננטה.

תרגילים:

1. משפט: $\det(A^t)=\det(A)$, הוכחה בהרצאה. תהא $A\in\mathbb{R}^{101\times 101}$ אנטי־סימטרית.
הוכיחו: $A$ לא הפיכה.
פתרון: מתקיים: $A^t=-A$. כעת:

$$|A|\underset{*}{=}|A^t|=|-A|\underset{**}{=}(-1)^{101}|A|=-|A|$$

וקיבלנו

$$2|A|=0\Rightarrow|A|=0$$

כאשר מעבר $*$ נובע מהמשפט על שחלוף, ומעבר $**$ נובע מהשפעת כפל בסקלאר על דטרמיננטה, כאשר כל שורה מוכפלת בסקלאר.

2. יהא $a\in\mathbb{F}$, ונגדיר מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י:

$$A_{i,j}=\begin{cases}a & i=j\\ 1 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר,

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & a\end{pmatrix}$$

חשבו את $|A|$, וקבעו עבור אילו ערכים של $a$ המטריצה $A$ הפיכה.
פתרון: נשים לב שבהינתן מטריצה משולשית עליונה (גם תחתונה) הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון (הסבר: בחישוב לפי תמורות, חוץ מתמורת הזהות, בכל תמורה נכפיל איברים מעל ומתחת לאלכסון ולכן כל המחוברים, למעט מכפלת

האלכסון, מתאפסים). נעשה שני תהליכים של דירוג, להגיע למטריצה משולשית:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+\sum\limits_{i=2}^{n} R_i \to R_1} \begin{pmatrix} a+(n-1) & a+(n-1) & \cdots & a+(n-1) \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det(A) = (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\forall i>1: R_i - R_1 \to R_i}{=} (a+n-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{*}{=} (a+n-1)\cdot 1\cdot (a-1)^{n-1} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

כאשר מעבר $*$ נובע מכך שהדטרמיננטה של משולשית זה כפל איברי האלכסון. נקבל: $A$ הפיכה עבור $a \neq 1, 1-n$.