תרגיל 9

1. יהא $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או"נ. נגדיר מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j. כלומר $P=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי $P^tP=I$

פתרון : מחישוב ישיר

$$[P^tP]_{i,j}=v_i^t\cdot v_j=\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר $P^tP=I$

(ב) הוכיחו $det(P)\in\{\pm1\}$

פתרון : מכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\left|P^t\right|\cdot|P|=|I|=1$$

כיוון ש $|P^t|=|P|$ נקבל $|P|^2=1$ וכיוון ש $|P|$ מספר ממשי נסיק כי $|P|\in\{\pm1\}$

2. נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ כך

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2x+y+3z$$

ונגדיר קבוצה $\mathbb{R}^3 \supseteq \left\{v\in\mathbb{R}^3:\ \|v\|=1\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2=1\right\}=S$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v\in S}f(v)$$

כלומר את הערך המקס' ש f מקבלת עבור קלטים מ S. [רמז: אי שיוויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v)=\left\langle v,\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle$]

פתרון : לפי קושי שוורץ במרחב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלארית ו $u=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ נקבל ש

$$2x+y+3z=|\langle v,u\rangle|\leq\|v\|\cdot\|u\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{14}$$

ולכן עבור $v\in S$ נקבל $2x+y+3z\leq\sqrt{14}$ כלומר $\max_{v\in S}f(v)\leq\sqrt{14}$. נראה כי מתקיים שיוון. אכן עבור $t=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ ו $\frac{t}{\|t\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\in S$ מתקיים כי

$$f(\frac{t}{\|t\|})=\left\langle\frac{t}{\|t\|},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\sqrt{14}$$

וסיימנו.

3. ב $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית נגדיר $W=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. מצאו בעזרת גרם שמידט בסיס אורתונורמאלי ל W.

פתרון : נסדר את הבסיס של W כך : $\left\{v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ונפעיל גרם שמידט:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1\\
w_2 &= v_2-\tfrac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}-\tfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\1\\0\end{pmatrix}=\tfrac12\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\\
w_3 &= v_3-\tfrac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2-\tfrac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\tfrac{3/2}{6/4}\cdot\tfrac12\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}-\tfrac12\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ננרמל את הוקטורים ונקבל

$$\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס או"נ ל W.

בהצלחה! ☺