מרחב מכפלה פנימית

15 ביוני 2017

נורמה מושרית

בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר פונקציה הנקראת נורמה מושרית כך:

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

לכל $v \in V$

עובדות: מתקיים כי:

1. $0 \geq ||v||$ ושיוון אמ"מ $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
3. אי שיוון המשולש: $||v + u|| \leq ||v|| + ||u||$

הערה: מועיל לחשוב על נורמה כפונקציה המודדת אורך/גודל של וקטור.

.

דוגמא: $V = \mathbb{R}^n$ עם מכפלה פנימית $\langle x, y\rangle = x^t y$

אזי הנורמה המושרת היא $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

אי שיוון קושי שוורץ:

יהי V ממ"פ.

אזי לכל $x, y \in V$ מתקיים $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$. כאשר $||\cdot||$ הינה הנורמה המושרת.

בנוסף, מתקיים שיוון אמ"מ x, y כפולה אחד של השני.

תרגיל: יהיו $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ הוכח: $(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$.

פתרון: נסתכל ב $V = \mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלארית. נגדיר $x = (a_1, \dots a_n)$, $y = (1, \dots, 1)$ אזי לפי אי שיוון קושי שוורץ מתקיים: $|\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ כלומר $|(a_1 + \cdots + a_n)^2| \leq n(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$

מתי מתקיים שיוויון? אמ"מ x, y כפולה אחד של השני או במילים אחרות $a_1 = \cdots = a_n$.

וקטורים ניצבים ומרחב ניצב

הגדרות: יהי $V,\langle\cdot,\cdot\rangle$ ממ"פ (עם נורמה מושרת).

1. v יקרא נורמלי אם $||v||=1$ (הגודל שלו 1).
הערה: עבור $v\neq 0$ התהליך/מעבר $v\to\frac{v}{||v||}$ נקרא נירמול והנורמה של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1 .
למשל הנרמול של $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא המעבר לוקטור הנורמלי $\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{||\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}||}=$
$\frac{\begin{pmatrix}-2&0&1\end{pmatrix}}{\sqrt{5}}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

2. S תקרא אורתונורמלית אם S אורתוגנלית וכל וקטור ב Sהוא נורמלי. אם S בסיס הוא יקרא בסיס אורתונורמלי
הערה: קבוצה או"נ היא בת"ל.
למשל $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right\}$ בסיס או"נ.

טענה: עבור V ממ"פ ו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס או"נ מתקיים כי: לכל v מתקיים $v=\sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle v_i$

הוכחה: ראינו תירגול קודם שעבור בסיס או"ג מתקיים $v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}v_i$ בפרט עבור B בסיס או"נ + $\langle v_i,v_i\rangle=1$.

תהליך גרם שמידט

יהא V ממ"פ ו־ $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה בת"ל. תהליך גרם שמידט מעביר את B אל קבוצה $B^{'}=\{w_1,\dots,w_n\}$ אורתונורמלית.
האלגוריתם:

$$w_1:=v_1$$

$$w_2:=v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1$$

$$w_3:=v_3-\frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2}w_1-\frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2}w_2$$

$$\vdots$$

$$w_i:=v_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{<v_i,w_k>}{||w_k||^2}w_k$$

כעת $B^{'}=\{w_1,\dots,w_n\}$ היא קבוצה אורתוגנאלית וע"י נירמול כל וקטור נקבל את המבוקש.
הערות:

1. בפרט לכל $W\leq V$ תת מרחב קיים בסיס אורתונורמלי (בפרט אורתוגונלי)

2. לכל $1 \leq l \leq n$ מתקיים $span(\{v_1, \ldots, v_l\}) = span(\{w_1, \ldots, w_l\})$
ולכן $span(B) = span(\{w_1, \ldots, w_l, v_{l+1}, \ldots v_n\})$ כלומר ניתן להפעיל את תהליך גרם שמידט רק על הרישא של הקבוצה בלי לאבד מידע.

דוגמא:

הפוך את הקבוצה $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

פתרון: נבחר $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{||w_2||^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(\frac{1}{2})}{(\frac{6}{4})} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת $\{w_1, w_2, w_3\}$אורתוגונאלית (בדקו!). ננרמל את הוקטורים
$||w_1|| = \sqrt{2}$ $||w_2|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $||w_3|| = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
כעת קבוצה אורתונורמלית.

הערה: אם היינו מחליפים את סדר האברים בבסיס ומתחילים עם $w_1 = v_2$ היינו מקבלים קבוצה אורתונורמלית אחרת.