לינארית 2 - מועד א'

מרצה: תמר בר־און.
מתרגל: אחיה בר־און.
עליכם לענות על כל השאלות.
משקל כל שאלה 27 נקודות.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. קבעו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה הבאה לכסינה:

$$A(a) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a = 3$, מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש$P^{-1}A(3)P = D$.

2. נגדיר מ"פ חדשה על $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו שזאת אכן מ"פ.
(ב) מצאו בסיס או"נ ל$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הנתונה.
(ג) חשבו את $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}^{\perp}$ עבור המ"פ הנתונה.

3.

(א) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה, כך שקיימים $0 \neq k \in \mathbb{N}$ ו $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ כך ש $A^k = \alpha I$. הוכיחו שA לכסינה.
(ב) יהי V ממ"פ ממימד סופי. הוכיחו/הפריכו: אם

$$V = W_1 \oplus W_2$$

אז

$$V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$$

.

4. יהא $(V, \langle\rangle)$ ממ"פ ו יהא $W \leq V$ ת"מ. נסמן ב$\pi_W(v)$ את ההטלה (הניצבת) של v על W.

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ ולכן $v \in V$ מתקיים כי $\langle w, \pi_W(v)\rangle = \langle w, v\rangle$

(ב) יהא $T : V \to V$ אופרטור כך ש W הוא T-אינווארנטי. נגדיר

$$T|_W : W \to W$$

את הצמצום של T ל W. הוכיחו כי

$$(T|_W)^* : W \to W$$

היא

$$(T|_W)^* = \pi_W \circ T^*$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם $T : V \to V$ הוא אופרטור נורמלי , וW הוא תת מרחב T- אינוואריאנטי, אז

$$T|_W : W \to W$$

הוא אופרטור נורמלי.