89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 5

יחסים

זוגות סדורים

הגדרה: *הזוג הסדור* (a,b) הוא הקבוצה $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

משפט: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

הגדרה: *הח'יה הסדורה* $(a_1,\dots,a_n)$ מוגדרת כ: $(a_1,\dots,a_n)=\begin{cases}(a_1,a_n), & n=2\\ \big(a_1,(a_2,\dots,a_n)\big), & n>2\end{cases}$.

דוגמה: *השלשה הסדורה* (a,b,c) היא

$$(a,b,c)=\big(a,(b,c)\big)=\{\{a\},\{a,(b,c)\}\}=\Big\{\{a\},\Big\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\Big\}\Big\}$$

מכפלה קרטזית

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A ו B היא

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$$

דוגמה: תהיינה $A=\{a,b\}, B=\{1,2,3\}$.

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$
$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

מסקנה: מכפלה קרטזית אינה קומוטטיבית.

תרגיל: תהיינה A,B,C,D קבוצות, הוכח ש $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.
הוכחה:
יהי (x,y) זוג סדור שרירותי.
נראה ש $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

$(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow$ הגדרת חיתוך

$(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D) \Leftrightarrow$ הגדרת מכפלה קרטזית

$(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D) \Leftrightarrow$ אסוציאטיביות + קומוטטיביות

$(x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D) \Leftrightarrow$ הגדרת חיתוך

$(x\in A\cap C)\wedge(y\in B\cap D) \Leftrightarrow$ הגדרת מכפלה קרטזית

$(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

משפט מההרצאה: תהיינה A, B קבוצות. $A \times B = B \times A$ אם ורק אם $A = B$ או $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$.
ננתח את הוכחת המשפט.
<u>רעיון ההוכחה</u>: מכיון שצריך להוכיח "אם ורק אם", לפי אסטרטגיה 14 נוכיח כל גרירה בנפרד.

1) "רק אם".
לפי אסטרטגיה 1 נניח ש $A \times B = B \times A$, המטרה היא $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$.
נכתוב זאת כ $(A = \emptyset \vee B = \emptyset) \vee A = B$.
לפי אסטרטגיה 19 נניח $\neg(A = \emptyset \vee B = \emptyset)$ ונוכיח $A = B$.
לפי דה מורגן נניח $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, ולפי אסטרטגיה 13 נתיחס לשתי הנחות נפרדות.

נתונים	מטרה
$A \times B = B \times A$ $A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$	$A = B$

לפי אסטרטגיה 10 נגדיר משתנים חדשים.

נתונים	מטרה
$A \times B = B \times A$ $a_0 \in A$ $b_0 \in B$	$A = B$

2) "אם". לפי אסטרטגיה 1 נקבל

נתונים	מטרה
$A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$	$A \times B = B \times A$

לפי אסטרטגיה 17 נפרק את ההנחות למקרים שונים.

<u>הוכחה</u>:
$(\Leftarrow)$ נניח ש $A \times B = B \times A$ ונוכיח ש $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$.
אם $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$, הטענה נכונה באופן מידי.
כעת נניח ש $A \neq \emptyset$ וגם $B \neq \emptyset$ ונוכיח ש $A = B$.
נראה ש $A \subseteq B$. יהי $a \in A$ שרירותי.
מכיון ש $B \neq \emptyset$ קיים $b_0 \in B$, ונקבל ש $(a, b_0) \in A \times B$ כלומר $(a, b_0) \in B \times A$ ולכן $a \in B$.
נראה ש $B \subseteq A$. יהי $b \in B$ שרירותי.
מכיון ש $A \neq \emptyset$ קיים $a_0 \in A$, ונקבל ש $(b, a_0) \in B \times A$ כלומר $(b, a_0) \in A \times B$ ולכן $b \in A$.
לכן $A = B$.
$(\Rightarrow)$ נניח ש $A = B$ או $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$ ונוכיח ש $A \times B = B \times A$.
<u>מקרה 1</u>: $A = \emptyset$. אזי $A \times B = \emptyset \times B = \emptyset = B \times \emptyset = B \times A$.
<u>מקרה 2</u>: $B = \emptyset$. אזי $A \times B = A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A = B \times A$.
<u>מקרה 3</u>: $A = B$. אזי $A \times B = A \times A = B \times A$.

יחסים

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות. $R \subseteq A \times B$ נקרא יחס (בינארי) מ A ל B.
אם $A = B$, R נקרא יחס על A (או יחס מעל A).
לעיתים מסמנים $(a, b) \in R$ בצורה aRb.

דוגמה: תהיינה $A = \{1,2,3\}, B = \{a, b, c, d\}$.
$R = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, b), (3, d)\}$ הוא יחס מ A ל B.

<u>דוגמה</u>: היחס "קטן או שווה" על $\mathbb{Z}$ מוגדר כ $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N}: b = a + k\}$. אם $(a,b) \in R$ נסמן $a \leq b$.
למשל $(1,1),(1,2),(1,3),(2,3) \in R$ אולם $(2,1) \notin R$.

<u>דוגמה</u>: היחס "מחלק את" על $\mathbb{Z}$ מוגדר כ $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ כך ש $a \mid b$.
למשל $(2,2),(3,12) \in R$ אולם $(2,1),(5,7) \notin R$.

<u>פעולות על יחסים</u>

<u>הגדרה</u>: תהיינה A,B,C קבוצות, ויהיו $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ יחסים.

התחום של R הוא $Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a,b) \in R\}$.

הטווח של R הוא $Ran(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a,b) \in R\}$.

היחס ההפוך ל $R \subseteq A \times B$ הוא היחס $R^{-1} \subseteq B \times A$ המוגדר על ידי

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

הרכבת היחסים R,S היא היחס $S \circ R \subseteq A \times C$ המוגדר על ידי

$$S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big)\}$$

<u>דוגמה</u>: תהיינה $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}, C = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, נגדיר את היחסים:

$$R = \{(1,a),(1,c),(2,a),(2,b),(3,d)\} \subseteq A \times B$$

$$S = \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\gamma),(d,\gamma)\} \subseteq B \times C$$

אזי

$$Dom(R) = \{1,2,3\}, \qquad Ran(R) = \{a,b,c,d\}$$

$$Dom(S) = \{a,b,c,d\}, \qquad Ran(S) = \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

$$R^{-1} = \{(a,1),(c,1),(a,2),(b,2),(d,3)\} \subseteq B \times A$$

$$S \circ R = \{(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma),(2,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\} \subseteq A \times C$$

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה. יחס הזהות על A הוא $i_A = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$.

<u>תרגיל</u> תהיינה A,B קבוצות, ויהי $R \subseteq A \times B$ יחס.

1. האם $i_A \subseteq R^{-1} \circ R$?

לא. נראה דוגמה נגדית: $A = \{1,2\}, B = \{a,b\}$, $R = \{(1,a),(1,b)\}$.

אזי $R^{-1} = \{(a,1),(b,1)\}$, ו $R^{-1} \circ R = \{(1,1)\}$ אולם $i_A = \{(1,1),(2,2)\}$.

2. מתי מתקיים $i_A \subseteq R^{-1} \circ R$?

$$i_A \subseteq R^{-1} \circ R \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\Leftrightarrow} \forall (a,a) \in i_A\big((a,a) \in R^{-1} \circ R\big) \overset{\text{הגדרת הרכבת יחסים}}{\Leftrightarrow} \forall (a,a) \in i_A\left(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R^{-1}\big)\right) \overset{\text{הגדרת יחס הפוך}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall (a,a) \in i_A\left(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (a,b) \in R\big)\right) \overset{\text{אידמפוטנטיות}}{\Leftrightarrow} \forall (a,a) \in i_A(\exists b \in B: (a,b) \in R) \overset{\text{הגדרת היחס } i_A}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall a \in A(\exists b \in B: (a,b) \in R) \overset{\text{הגדרת תחום של יחס}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A: a \in Dom(R)$$

כלומר $i_A \subseteq R^{-1} \circ R$ אם ורק אם $Dom(R) = A$.

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C קבוצות, ויהיו $R \subseteq A \times B$ ו $S,T \subseteq B \times C$ יחסים.
הוכח כי אם $S \subseteq T$ אזי $S \circ R \subseteq T \circ R$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש $S \subseteq T$ ונוכיח ש $S \circ R \subseteq T \circ R$.

יהי (a,c) זוג סדור שרירותי.

$$(a,c) \in S \circ R \overset{\text{הגדרת הרכבת יחסים}}{\Leftrightarrow} \exists b \in B\big((a,b) \in R \land (b,c) \in S\big) \overset{S \subseteq T}{\Rightarrow} \exists b \in B\big((a,b) \in R \land (b,c) \in T\big) \overset{\text{הגדרת הרכבת יחסים}}{\Leftrightarrow} (a,c) \in T \circ R$$

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C קבוצות, ויהיו $R \subseteq A \times B$ ו $S,T \subseteq B \times C$ יחסים.
הוכח או הפרך:

1. $(S \circ R) \setminus (T \circ R) \supseteq (S \setminus T) \circ R$
2. $(S \circ R) \setminus (T \circ R) \subseteq (S \setminus T) \circ R$

<u>פתרון</u>:

1. ננסה להוכיח: יהי (a,c) שרירותי. נניח ש $(a,c) \in (S \setminus T) \circ R$ ונראה ש $(a,c) \in (S \circ R) \setminus (T \circ R)$.

מהגדרת הרכבת יחסים נובע שקיים $b \in B$ כך ש $(a,b) \in R \land (b,c) \in S \setminus T$.

כלומר, קיים $b \in B$ כך ש $(a,b) \in R \land (b,c) \in S \land (b,c) \notin T$.

כעת, קיים $b \in B$ כך ש $(a,b) \in R \land (b,c) \in S$, ולכן $(a,c) \in S \circ R$,

מצד שני, קיים $b \in B$ כך ש $(a,b) \in R \land (b,c) \notin T$, ולכן $(a,c) \notin T \circ R$.

לכן, לפי הגדרת הפרש קבוצות $(a,c) \in (S \circ R) \setminus (T \circ R)$.

הוכחנו עבור אבר שרירותי, ולכן $(S \setminus T) \circ R \subseteq (S \circ R) \setminus (T \circ R)$.

<u>זהירות!!! ההוכחה לא נכונה!!!!</u>

אם קיים $b \in B$ כך ש $(a,b) \in R \land (b,c) \notin T$, זה לא גורר ש $(a,c) \notin T \circ R$!!!

המשמעות של $(a,c) \notin T \circ R$ היא $\neg\exists b \in B\big((a,b) \in R \land (b,c) \in T\big)$.

כלומר $\forall b \in B\big((a,b) \notin R \lor (b,c) \notin T\big)$.

נראה דוגמה נגדית:

$A = \{1,2\}, B = \{a,b,c\}, C = \{\alpha,\beta\}$

נגדיר את היחסים:

$R = \{(1,a),(2,b),(1,c),(2,c)\}$

$S = \{(a,\alpha),(b,\beta),(c,\beta)\}$

$T = \{(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta)\}$

וכעת:

$S \setminus T = \{(a,\alpha),(c,\beta)\}$

$(S \setminus T) \circ R = \{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\beta)\}$

$S \circ R = \{(1,\alpha),(2,\beta),(1,\beta)\}$

$T \circ R = \{(1,\beta),(2,\alpha),(2,\beta)\}$

$(S \circ R) \setminus (T \circ R) = \{(1,\alpha)\}$

2. נכון.
יהי (a,c) שרירותי ונניח ש $(a,c) \in (S \circ R) \setminus (T \circ R)$, נראה ש $(a,c) \in (S \setminus T) \circ R$.

$(a,c) \in (S \circ R) \setminus (T \circ R) \Leftrightarrow$ הגדרת הפרש קבוצות

$(a,c) \in (S \circ R) \wedge (a,c) \notin (T \circ R) \Leftrightarrow$ הגדרת הרכבת יחסים

$\Big(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big)\Big) \wedge \neg\Big(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow$ שלילת כמתים + דה מורגן

$\Big(\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big)\Big) \wedge \Big(\forall b \in B\big((a,b) \notin R \vee (b,c) \notin T\big)\Big) \overset{(\star)}{\Rightarrow}$

$\exists b \in B\Big(\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big) \wedge \big((a,b) \notin R \vee (b,c) \notin T\big)\Big) \Leftrightarrow$ דיסטריביוטיביות

$\exists b \in B\Big(\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (a,b) \notin R\big) \vee \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (b,c) \notin T\big)\Big) \Leftrightarrow$ חוק המשלים + חוק הזהות

$\exists b \in B\Big(F \vee \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (b,c) \notin T\big)\Big) \Leftrightarrow$ חוק הזהות

$\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (b,c) \notin T\big) \Leftrightarrow$ הגדרת הפרש קבוצות

$\exists b \in B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \setminus T\big) \Leftrightarrow$ הגדרת הרכבת יחסים

$(a,c) \in (S \setminus T) \circ R$

נוכיח את $(\star)$.
נגדיר את הפרדיקטים $P(b) = \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big)$ ו $Q(b) = \big((a,b) \notin R \vee (b,c) \notin T\big)$.
אנו רוצים להוכיח $\big(\exists b \in B: P(b)\big) \wedge \big(\forall b \in B: Q(b)\big) \Rightarrow \exists b \in B\big(P(b) \wedge Q(b)\big)$.
נניח $\big(\exists b \in B: P(b)\big) \wedge \big(\forall b \in B: Q(b)\big)$.
מחוק הפישוט נובע $\exists b \in B: P(b)$ ובנוסף $\forall b \in B: Q(b)$.
כעת, לפי ES מ $\exists b \in B: P(b)$ נובע שקיים $b_0 \in B$ עבורו מתקיים $P(b_0)$.
לפי US מ $\forall b \in B: Q(b)$ נובע שבפרט עבור $b_0 \in B$ מתקיים $Q(b_0)$.
לפי חוק החיתוך, מ $P(b_0)$ ו $Q(b_0)$ נובע $P(b_0) \wedge Q(b_0)$, ולפי EG נקבל $\exists b \in B\big(P(b) \wedge Q(b)\big)$.

<u>תכונות של יחסים</u>

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה, ויהי R יחס על A.
- R נקרא רפלקסיבי אם $\forall a \in A: (a,a) \in R$.
- R נקרא סימטרי אם $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.
- R נקרא אנטי-סימטרי אם $\forall a,b \in A: \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\big) \Rightarrow a = b$.
- R נקרא טרנזיטיבי אם $\forall a,b,c \in A: \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\big) \Rightarrow (a,c) \in R$.

<u>הערה</u>: תהי A קבוצה, ויהי R יחס על A. על מנת לשלול את התכונות נשים לב ש
- R אינו רפלקסיבי אם $\exists a \in A: (a,a) \notin R$.
- R אינו סימטרי אם $\exists a,b \in A: \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R\big)$.
- R אינו אנטי-סימטרי אם $\exists a,b \in A: \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge a \neq b\big)$.
- R אינו טרנזיטיבי אם $\exists a,b,c \in A: \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R\big)$.

<u>דוגמה</u>: תהי $A = \{1,2,3,4\}$.

- היחס $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$:
  - לא רפלקסיבי כי $(3,3) \notin R_1$.
  - לא סימטרי כי $(3,4) \in R_1$ אולם $(4,3) \notin R_1$.
  - לא אנטי-סימטרי כי $(1,2) \in R_1$ וגם $(2,1) \in R_1$ אולם $1 \neq 2$.
  - לא טרנזיטיבי כי $(3,4) \in R_1$ וגם $(4,1) \in R_1$ אולם $(3,1) \notin R_1$.
- היחס $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$:
  - סימטרי כי עבור $(1,2) \in R_2$ מתקיים $(2,1) \in R_2$ (ולהיפך), ו $(1,1) \in R_2$ סימטרי ביחס לעצמו.
  - לא אנטי-סימטרי כי $(1,2) \in R_1$ וגם $(2,1) \in R_1$ אולם $1 \neq 2$.
  - לא טרנזיטיבי כי עבור $(1,2),(2,1) \in R_2$ מתקיים $(2,2) \notin R_2$.

<u>דוגמה</u>: היחס "קטן מ" על $\mathbb{Z}$, $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a < b\}$:

- לא רפלקסיבי - עבור $1 \in \mathbb{Z}$ לא מתקיים $1 < 1$.
- לא סימטרי - עבור $1,2 \in \mathbb{Z}$ מתקיים $1 < 2$ אולם לא מתקיים $2 < 1$.
- אנטי-סימטרי - לכל $a,b \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a < b \wedge b < a) \Rightarrow a = b$ (באופן ריק).
- טרנזיטיבי - לכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$.

<u>דוגמה</u>: היחס "קטן או שווה" על $\mathbb{Z}$, $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \leq b\}$:

- רפלקסיבי - לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \leq a$.
- לא סימטרי - עבור $1,2 \in \mathbb{Z}$ מתקיים $1 \leq 2$ אולם לא מתקיים $2 \leq 1$.
- אנטי-סימטרי - לכל $a,b \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$.
- טרנזיטיבי - לכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$.

<u>דוגמאות</u>: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה.

- היחס הריק $\emptyset \subseteq A \times A$ הוא סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.
- היחס המלא $A \times A$ הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
  - אם $A = \{a\}$ אזי $A \times A = \{(a,a)\}$ והיחס המלא הוא אנטי-סימטרי.
  - אם ב A יש יותר מאבר אחד אזי היחס המלא אינו אנטי-סימטרי.
- יחס הזהות $i_A = \{(a.a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$ הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי- סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>תרגיל</u>: תהי A קבוצה לא ריקה, ויהיו R_1, R_2 יחסים על A. הוכח או הפרך:

א) אם R_1, R_2 רפלקסיביים אזי $R_1 \cup R_2$ רפלקסיבי.

ב) אם R_1, R_2 סימטריים אזי $R_1 \cup R_2$ סימטרי.

ג) אם R_1, R_2 אנטי-סימטריים אזי $R_1 \cup R_2$ אנטי-סימטרי.

ד) אם R_1, R_2 טרנזיטיביים אזי $R_1 \cup R_2$ טרנזיטיבי.

<u>פתרון</u>:

א) נכון. יהי $a \in A$. מכיוון ש R_1 רפלקסיבי נובע ש $(a,a) \in R_1$. ולכן $(a,a) \in R_1 \cup R_2$.

ב) נכון. יהיו $a,b \in A$ כך ש $(a,b) \in R_1 \cup R_2$, כלומר $(a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2$.

מקרה 1: אם $(a,b) \in R_1$ אזי מכיון ש R_1 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_1$, ולכן $(b,a) \in R_1 \cup R_2$.

מקרה 2: אם $(a,b) \in R_2$ אזי מכיון ש R_2 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_2$, ולכן $(b,a) \in R_1 \cup R_2$.

ג) לא נכון. יהיו $A = \{1,2\}, R_1 = \{(1,2)\}, R_2 = \{(2,1)\}$.

אזי R_1, R_2 אנטי-סימטריים אולם $R_1 \cup R_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ אינו אנטי-סימטרי.

ד) לא נכון. יהיו $A = \{1,2,3\}, R_1 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}, R_2 = \{(3,1),(1,2),(3,2)\}$.

אזי R_1, R_2 טרנזיטיביים אך $R_1 \cup R_2$ לא טרנזיטיבי כי $(1,3),(3,1) \in R_1 \cup R_2$ אולם $(1,1) \notin R_1 \cup R_2$.

<u>תרגיל</u>: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ויהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי על A. האם R רפלקסיבי?
<u>הוכחה לא נכונה</u>: יהי $a \in A$.
ניקח $b \in A$ כך ש $(a,b) \in R$.
R סימטרי ולכן $(b,a) \in R$.
R טרנזיטיבי ולכן מכיוון ש $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$, מתקיים $(a,a) \in R$.

עבור $a \in A$ לא מובטח שקיים $b \in A$ כך ש $(a,b) \in R$.
דוגמה נגדית $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,1)\}$. אזי R סימטרי וטרנזיטיבי אולם אינו רפלקסיבי.

<u>תרגיל</u>: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה ויהי R יחס על A. נגדיר $B = P(A) \setminus \{\emptyset\}$ ונגדיר את היחס

$$S = \{ (X,Y) \in B \times B \mid \forall x \in X \forall y \in Y: (x,y) \in R \}$$

הוכח שאם R טרנזיטיבי אזי S טרנזיטיבי.

<u>הוכחה</u>: נניח ש R טרנזיטיבי ונוכיח ש S טרנזיטיבי.

תהיינה $X,Y,Z \in B$ ונניח ש $(X,Y),(Y,Z) \in S$.

נוכיח ש $(X,Z) \in S$, כלומר שלכל $x \in X$ ולכל $z \in Z$ מתקיים $(x,z) \in R$.

מכיוון ש $(X,Y) \in S$ נובע שלכל $x \in X$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $(x,y) \in R$.

מכיוון ש $(Y,Z) \in S$ נובע שלכל $y \in Y$ ולכל $z \in Z$ מתקיים $(y,z) \in R$.

כעת, יהיו $x \in X$ ו $z \in Z$ שרירותיים.

מכיוון ש $Y \in B$ נובע בפרט ש $Y \neq \emptyset$, כלומר קיים $y_0 \in Y$.

נקבל ש $(x,y_0) \in R$ ו $(y_0,z) \in R$.

מהטרנזיטיביות של R נובע ש $(x,z) \in R$.

כלומר לכל $x \in X$ ולכל $z \in Z$ מתקיים $(x,z) \in R$, ולכן $(X,Z) \in S$.

לסיכום, הראינו שאם R טרנזיטיבי אזי S טרנזיטיבי.

שימו לב שעבור $B = P(A)$ הטענה לא תקפה!!

למשל עבור $A = \{1,2\}$ נגדיר את היחס $R = \{(2,1)\}$, נשים לב ש R טרנזיטיבי.

כעת, $P(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

עבור $X = \{1\}, Y = \emptyset, Z = \{2\}$ מתקיים $(X,Y),(Y,Z) \in S$ אך $(X,Z) \notin S$ מכיוון ש $(1,2) \notin R$.