תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

18 במאי 2022

חדוא

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

(א)

$$a_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)$$

פתרון: הערה: בחדוא 1 יש תרגילים שאפשר לפתור בעזרת לחסום את הסדרה משני הצדדים כך שכל הגבולות שווים. בתרגילים כאלו, שהם עם סכום של דברים, אפשר לחסום את הסדרה בעזרת האיבר הקטן ביותר (כפול מספר המחוברים) והאיבר הגדול ביותר (כפול מספר המחוברים). אצלנו, אם היינו עושים זאת, היינו מקבלים

$$0 \leftarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}\left(1^2 \cdot n\right) \leq a_n \leq \frac{1}{n^3}\left(n \cdot n^2\right) = 1 \to 1$$

אבל זה לא נותן תשובה מדויקת (אבל נותן לנו חסם - הגבול של a_n, במידה וקיים, הוא בין 0 ל 1). נפתור את התרגיל בעזרת סכומי רימן (שיודעים שמתכנסים לאינטגרל מסוים). בדר"כ, אצלנו לפחות, נציג את הסדרה בצורה של

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

עבור פונקציה f שרציפה בקטע $[0,1]$ ואז מקבלים שהסדרה היא סכום רימן ששואף ל $\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$. אצלנו בדוגמה, זה נראה ככה:

$$a_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

נגדיר $f(x) = x^2$ ואז

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \\
&\to \int_0^1 f(x)\mathrm{dx} \\
&= \int_0^1 x^2\mathrm{dx} \\
&= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(ב)

$$a_n = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}e^{\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n}e^{\frac{n}{n}}$$

פתרון: a_n זה בדיוק סכום רימן של הפונקציה הרציפה $f(x) = e^x$ בקטע $[0,1]$ כאשר מחלקים אותו ל n מלבנים שווים והגובה של כל מלבן הוא ערך הפונקציה בקצה הימני. ולכן

$$a_n \to \int_0^1 f(x)\mathrm{dx} = \int_0^1 e^x\mathrm{dx} = e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

(ג) נסתכל על $f(x) = x^2$ בקטע $[0,1]$ כאשר מחלקים אותו ל n^3 מלבנים שווים. רוחב כל מלבן יהיה כמובן $\frac{1}{n^3}$ והגובה של כל מלבן, נגדיר אותו להות ערך הפונקציה בקצה הימני. סכום n^3 מלבנים אלו יהיה

$$\frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{2}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{n^3}\right)^2 \to \int_0^1 x^2\mathrm{dx} = \frac{1}{3}$$

ועכשיו, מחברי שאלות יעשו את הדבר הבא: נגדיר סדרה

$$a_n = \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{2}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{n^3}\right)^2$$

מצאו את גבולה. ואם רוצים לסבך את השאלה אז "משחקים" קצת עם הביטויים, למשל

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{2}{n^3}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{n^3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3\cdot\left(n^3\right)^2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^6\right)
\end{aligned}
$$

ואז אפשר לשאול, מצאו את הגבול של הסדרה

$$\frac{1}{n^9}\left(1^2 + 2^2\cdots + \left(n^3\right)^2\right)$$

(ד)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}$$

פתרון: נעבוד ממקודם ו"ננחש" שמודבר בסכום רימן של פונקציה רציפה $f(x)$ בקטע $[0,1]$ כאשר מחלקים ל n מלבנים שווים שגובהם = ערך הפונקציה בקצה הימני.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+2nk+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+2k+\frac{k^2}{n}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+2\left(\frac{k}{n}\right)+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

עבור $f(x)=\frac{1}{1+2x+x^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$ (היה אפשר לקצר, אם היינו יודעים את זה ולהתחיל

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}=\sum_{k=1n^2}^{n}\frac{n}{\left(\frac{n+k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1n}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

ולהגיע שוב לפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$). כיוון ש $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ רציפה ב $[0,1]$ ו a_n אלו סכומי רימן שלה נקבל ש

$$a_n\to\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{dx}=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$$

(ה)

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

פתרון: נשחק קצת עם a_n ונגיע לדברים דומים לדברים שעשינו:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1^2}{n^2}\right)}}+\frac{1}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{2^2}{n^2}\right)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{n^2}{n^2}\right)}}\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(4-\frac{1^2}{n^2}\right)}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(4-\frac{2^2}{n^2}\right)}}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(4-\frac{n^2}{n^2}\right)}}\\&=\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{n}{n}\right)\end{aligned}$$

עבור $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ ו a_n אלו סכומי רימן שלה ולכן

$$a_n\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{dx}$$

עכשיו נשאר לנו להתמודד עם האינטגל וזה תהיה התשובה לשאלה. מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

ואז בהצבה של $t=\frac{x}{2}$ (ואז $\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\mathrm{dx}$ או $\mathrm{dx}=2\mathrm{dt}$ נקבל

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}2\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt}$$

נתמקד ב $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt}$ ונקווה שהצבה $t=\sin(u)$ תעבוד (שבאה משום מקום אבל כנראה תעבוד. כמובן ש $u=\arcsin(t)$)

$$\mathrm{dt} = \cos(u)du$$

ואז

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt} = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cos(u)du = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u)}}\cos(u)du$$

ומכיוון ש $\cos(u)$ חיובי ב $[0,\arcsin(\frac{1}{2})]$ נקבל שזה שווה ל

$$= \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{1}{|\cos(u)|}\cos(u)du = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{1}{\cos(u)}\cos(u)du = \int_0^{\arcsin(\frac{1}{2})} 1du = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

(ו) דוגמה אחרונה בסגנון הזה עם טוויסט:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+3}{(n+k)^2}$$

כאשר $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$ ראינו קודם וראינו ש $a_n \to \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}$ ושינוי הקל הוא $+3$ שבמונה. "תיקון" אפשרי הוא כזה:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+3}{(n+k)^2} = \left(\frac{n+3}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \left(\frac{n+3}{n}\right)\cdot a_n \to 1\cdot\frac{1}{2}$$

2. נפח גוף סיבוב - נפח של כדור ים: כדור יום הוא פשוט כדור תלת מימדי עם רדיוס R. כדור ים כזה הוא גוף סיבוב (סביב ציר x) של הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$$

בקטע $[-R,R]$ (זהו חצי מעגל). הנוסחה לנפח גוף סיבוב היא

$$\int_{-R}^{R} \pi\left(f(x)\right)^2\mathrm{dx} = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{dx} = \pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)|_{-R}^{R} =$$

$$\pi\left(\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right) = \pi\left(\left(\frac{2R^3}{3}\right)-\left(-\frac{2R^3}{3}\right)\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

לינארית

1. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות. אזי

(א) אם A, B מטריצות הפיכות אזי גם המכפלה $A \cdot B$ היא מטריצה הפיכה. (בדומה לפונקציות).
הוכחה: נניח A, B הפיכות ונרצה להוכיח ש AB הפיכה. מההנחה קיימות A^{-1}, B^{-1} ואז נחשב

$$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$$

וקיבלנו שהמטריצה AB כפולה המטריצה $B^{-1}A^{-1}$ שווה ל I והמטריצות ריבועיות ולכן ההופכית של AB היא $B^{-1}A^{-1}$
או בקיצור

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ב) אם המכפלה $A \cdot B$ היא מטריצה הפיכה אז גם כל אחת מהמטריצות A, B הפיכה. (בשונה מפונקציות).
הוכחה: נניח ש AB הפיכה ונראה ש A הפיכה ו B הפיכה. מההנחה ש AB הפיכה קיימת מטריצה C כך ש

$$ABC = I, \quad CAB = I$$

ולכן A כפול BC שווה ל I ולכן A הפיכה (ההופכית שלה היא BC). בנוסף, CA כפול B שווה ל I ולכן B הפיכה (וההופכית שלה היא CA). הדגשה: זה נכון כיוון שהמטריצות ריבועית.

$$A\underbrace{(BC)}_{A^{-1}} = I, \quad \underbrace{(CA)}_{B^{-1}}B = I$$

(ג) הערה: הטענות לעיל נכונות גם כפל של n מטריצות. כלומר עבור $A_1, \ldots, A_n$ מטריצות ריבועית מתקיים שהכפל בין כולם הוא מטריצה הפיכה אם ורק אם כל אחת מהן הפיכה.

2. תהא A מטריצה 3×3 המקיימת כי

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} I$$

מצאו את A, הוכיחו שהיא הפיכה ומצאו את ההופכית.
פתרון: ראיתם באלגרותים של הפיכות שאם מדרגים את $(A|I)$ ומגיעים ל $(I|B)$אז B היא ההופכית של A. אצלנו נתון שאחרי דירוג A מגיעים ל I ולכן היא הפיכה ומתקיים שאם נפעיל את אותם פעולות על I נגיע להופכית של A. כלומר

$$I \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} A^{-1}$$

נחשב

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

כעת, בשביל למצוא את A אפשר לחשב את ההופכית של A^{-1} (שימו לב שההופכית של A^{-1} היא A. או בקיצור $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$).
אנחנו נעשה את זה טיפה שונה ופשוט נהפוך את סדר הפעולות: כלומר, כיוון ש

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \xrightarrow{R_3 + 2R_1} I$$

אז

$$A \xleftarrow{3R_2} \xleftarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \xleftarrow{R_3 - 2R_1} I$$

נחשב זאת ישירות

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-6&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{3R_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xleftarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\xleftarrow{R_3-2R_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נעשה גם דרך ההופכית: נמצא את ההופכית של A^{-1} על ידי האלגוריתם:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\2&\frac{1}{3}&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&\frac{1}{3}&0&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&-2&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{3R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-6&0&3\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

וגם פה הגענו ש

$$A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-6&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$$

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו: לכל מטריצה $B\in\mathbb{R}^{n\times k}$ מתקיים ש $AB=0_{n\times k}$ אם ורק אם $B=0_{n\times k}$.
הוכחה: בכיוון $(\Rightarrow)$ בהנחה ש B היא מטריצה של אפסים בודאי שהכפל AB הוא גם מטריצת אפסים.
בכיוון $(\Leftarrow)$ נניח ש $AB=0$ ונוכיח ש $B=0$. נתון לנו ש A הפיכה ולכן קיימת A^{-1}. נכפיל את השוויון $AB=0$ במטריצה

$$A^{-1}$$

משמאל ונקבל

$$B=I\cdot B=\left(A^{-1}A\right)B=A^{-1}\left(AB\right)=A^{-1}0=0$$

וקיבלנו ש $B=0$ כמו שרצינו.
הערה: זה נותן עוד הוכחה לכך שלמערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד שהוא $x=0$.

4. אני מניח שראיתם שהמטריצה

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

אינה הפיכה. בואו נשאל, לאילו ערכי a מתקיים שהמטריצה

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&a\end{pmatrix}$$

אינה הפיכה?
פתרון: נדרג ונראה מתי אפשר להגיע ל I. במקרים אלו המטריצה הפיכה ובשאר המקרים - לא.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-7R_1]{R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&a-21\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&a-9\end{pmatrix}$$

וקיבלנו מטריצה שנראת מדורגת. כעת, עם $a\neq 9$, קיבלנו מטריצה ריבועית 3×3 שיש לה 3 איברים פותחים שונים מאפס. נוכל להפוך את כולם ל 1 (ע"י חילוק מתאים) ואז לאפס את מה שמעליהם ולהגיע ל I ולכן במקרה זה ש $a\neq 9$ המטריצה תהיה הפיכה. במקרה ש $a=9$ אפשר לראות וגם ידוע שהמטריצה אינה הפיכה.
לסיכום: קיבלנו שרק עבור $a=9$ המטריצה אינה הפיכה וזה מראה כמה "לא סביר" לקבל מטריצה לא הפיכה שהרי יש רק ערך אחד (במקרה שלנו) לעומת אינסוף אחרים שבערך זה המטריצה אינה הפיכה.

5. נכון/לא נכון:

(א) מטריצה שכל האלכסון שלה אפסים בהכרח לא הפיכה.
פתרון: לא נכון, למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

היא הפיכה שהרי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן A הפיכה וההופכית שלה היא A (גם כן) או בקיצור $A^{-1} = A$.

(ב) מטריצה שרוב האיברים שלה אפסים בהכרח לא הפיכה.
פתרון: לא נכון, למשל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצת היחידה מגודל 3×3 היא הפיכה כמובן.

(ג) מטריצה שרוב האיברים בה אפסים וגם האלכסון שלה אפסים היא בהכרח לא הפיכה.
פתרון: לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא הפיכה כי על ידי החלפת שורות נגיע למטריצת היחידה. אפשר לבדוק ולראות (אם אינני טועה) ש $A^3 = I$ ולכן ההופכית של A היא A^2. בקיצור $A^{-1} = A^2$.

(ד) מטריצה שאחרי דירוג יש לה שורת אפסים בהכרח אינה הפיכה.
פתרון: נכון. הוכחה: תהא A שאחרי דירוג יש לה שורת אפסים. דבר ראשון, אם A אינה ריבועית היא לא הפיכה (משפט). אחרת, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ריבועית. מה אנחנו יודעים על פתרונות של המערכת $Ax = 0$? מצד אחד, ראינו שעבור מטריצות הפיכות מתקיים שיש פתרון יחיד $x = 0$ אבל אצלנו זה לא המצב ולכן A אינה הפיכה. למה אצלנו יש עוד פתרונות חוץ מ $x = 0$? מכיוון שנתון שאחרי דירוג יש לה שורת אפסים (זכרו: דירוג לא משנה את הפתרונות למערכת) אז יש לה לכל היותר $n - 1$ שורות שונות מאפס ולכן לכל היותר $n - 1$ איברים פותחים שונים מאפס ולכן יש לה לכל היותר $n - 1$ משתנים תלויים ובהכרח יש לה משתנה חופשי אחד (לפחות!). מכאן שיש לה אינסוף פתרונות (במקרה של מטריצה ממשית).