תרגיל 4

1. הוכח שאם $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ אז $|A| = |B|$.

2. תהיי הקבוצה $B = \{n^2 | n \in N\}$ הוכח ש $|B| = |N|$.

3. הוכח או הפרך: אם $|A| = |B|$ אז קיימת פונקציה f חח"ע מ A ל B שהיא לא על.

4. תהי קבוצה של קטעים פתוחים על הישר הממשי כך שלכל שני קטעים בקבוצה זרים זה לזה.הוכח שהקבוצה היא סופית או בת-מניה (רמז: חשוב על קטע סופי כלשהו, כמה קטעים ששיכים לקבוצה יכולים להיות בעלי אורך גדול או שווה מ $\frac{1}{n}$ בקטע זה? אורך של הקטע (a,b) הוא $a-b$).

5.
   א. תהינה A,B,C קבוצות. הוכח שאם $B,C \subseteq A$, $|C| = |B|$ ו $B \cap C = \varnothing$ אז $|A-B| = |A-C|$.
   ב. מצא, באמצעות סעיף א, את העוצמה של קבוצת כל המספרים הממשיים האי-רציונאליים בין 0 ל-1.

6. נניח ש A קבוצה אינסופית הוכח:
   א. כל קבוצה B המקיימת $A \subseteq B$ היא אינסופית.
   ב. כל קבוצה B שעבורה קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ היא אינסופית.
   ג. לכל קבוצה לא ריקה B הקבוצה $A \times B$ אינסופית.
   ד. קבוצת כל הפונקציות מ B ל A היא אינסופית.

7. מהי עוצמת קבוצת כל הסדרות העולות של מספרים טבעיים?

8. תן דוגמא לקבוצה שעוצמתה גדולה ממש מעוצמת הרצף.

9. יהיו k,λ,η עוצמות. הוכח ש:

א. $k^{\lambda+\eta}=k^{\lambda}\cdot k^{\eta}$.

ב. $(k^{\lambda})^{\eta}=k^{\lambda\cdot\eta}$.

10. יהיו k,λ,μ עוצמות. הוכח ש:

ב. אם $0<\lambda\le\mu$ אז $k^{\lambda}\le k^{\mu}$.

ג. אם $k>0$ אז $0^{k}=0$.

ד. $1^{k}=1, k^{0}=1$.