תרגיל 2.18:

תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. $\ker T=\ker T^2$
ב. $\operatorname{Im} T=\operatorname{Im} T^2$
ג. $V=\ker T\oplus\operatorname{Im} T$
ד. $\ker T\cap\operatorname{Im} T=\{0\}$

פתרון:

ג' $\Leftarrow$ ד': מההגדרה של סכום ישר

ד' $\Leftarrow$ ג': $\ker T,\operatorname{Im} T\subseteq V$ לכן $\ker T+\operatorname{Im} T\subseteq V$. לפי משפט המימדים $\dim(\ker T+\operatorname{Im} T)=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im} T-\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} T)$ אבל לפי הנתון $\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} T)=0$ ונובע $\dim(\ker T+\operatorname{Im} T)=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im} T$. לפי משפט הדרגה $\dim\operatorname{Im} T+\dim\ker T=\dim V$.

ביחד $\dim(\ker T+\operatorname{Im} T)=\dim V$, $\ker T+\operatorname{Im} T\subseteq V$ לכן $\ker T+\operatorname{Im} T=V$ ומכיוון שהחיתוך הוא אפס זהו סכום ישר.

ד' $\Leftarrow$ א': ידוע $\ker T\subseteq\ker T^2$. נניח בשלילה ש $\ker T\neq\ker T^2$ לכן קיים איבר $v\in\ker T^2$ כך ש $v\notin\ker T$. לכן $T^2v=T(Tv)=0$ ו $Tv\neq 0$. לכן $Tv\in\ker T$, ברור ש $Tv\in\operatorname{Im} T$ לכן $0\neq Tv\in\ker T\cap\operatorname{Im} T$ בסתירה.

א' $\Leftarrow$ ד': נניח בשלילה שקיים $0\neq v\in\ker T\cap\operatorname{Im} T$ לכן $v=Tw$ עבור איזשהו $w\in V$ (כי $v\in\operatorname{Im} T$), $Tv=0$ (כי $v\in\ker T$) לכן $0=Tv=T(Tw)=T^2w$ לכן $w\in\ker T^2$ אבל $\ker T^2=\ker T$ לכן $w\in\ker T$ לכן $Tw=0$ לכן $v=0$ בסתירה.

ד' $\Leftarrow$ ב': ידוע ש $\operatorname{Im}T^2 \subseteq \operatorname{Im}T$. נניח בשלילה ש $\operatorname{Im}T^2 \neq \operatorname{Im}T$ לכן $\dim\operatorname{Im}T^2 < \dim\operatorname{Im}T$.
ניקח בסיס $\{v_1,...,v_m\}$ ל $\operatorname{Im}T$. בגלל שאילו איברים בתמונה הם מהצורה $\{Tw_1,...,Tw_m\}$. כעת $Tv_1,...,Tv_m$ שווים ל $T^2w_1,...,T^2w_m \in \operatorname{Im}T^2$ לכן בהכרח $Tv_1,...,Tv_m$ ת"ל אחרת יש קבוצה בת"ל בגודל $\dim\operatorname{Im}T = m$ ב $\operatorname{Im}T^2$ בסתירה לכך שהמימד של $\operatorname{Im}T^2$ קטן ממש מהמימד של $\operatorname{Im}T$.

לכן יש צירוף לינארי לא טריוויאלי $\alpha_1Tv_1 + ... + \alpha_mTv_m = 0$. מתכונות העתקה לינארית $T(\alpha_1v_1 + ... + \alpha_mv_m) = 0$. אבל $\{v_1,...,v_m\}$ בסיס ולכן בת"ל ולכן צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שונה מאפס כלומר $v = \alpha_1v_1 + ... + \alpha_mv_m \neq 0$ אבל כל צירוף לינארי של איברי הבסיס של $\operatorname{Im}T$ שייך ל $\operatorname{Im}T$ ולכן $v \in \operatorname{Im}T$, $Tv = 0$ לכן $v \in \ker T$ וביחד $0 \neq v \in \ker T \cap \operatorname{Im}T$ בסתירה.

ב' $\Leftarrow$ ד': ניקח בסיס $\{T^2u_1,...,T^2u_t\}$ ל $\operatorname{Im}T^2$. נניח בשלילה ש $Tu_1,...,Tu_t$ ת"ל, לכן קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהם שמתאפס $\alpha_1Tu_1 + ... + \alpha_tTu_t = 0$ ולכן $T(\alpha_1Tu_1 + ... + \alpha_tTu_t) = 0$ ולכן $\alpha_1T^2u_1 + ... + \alpha_tT^2u_t = 0$ כלומר מצאנו צירוף לינארי לא טריוויאלי שמתאפס של איבר הבסיס של $\operatorname{Im}T^2$ בסתירה להיותו בת"ל.

כלומר $\operatorname{Im}T \supseteq \{Tu_1,...,Tu_t\}$ קבוצה בת"ל בגודל $\dim\operatorname{Im}T^2 = t$ בתוך $\operatorname{Im}T$. אבל $\dim\operatorname{Im}T = \dim\operatorname{Im}T^2$ לפי הנתון ולכן לפי השלישי חינם $\{Tu_1,...,Tu_t\}$ בסיס ל $\operatorname{Im}T$.

כעת, נניח בשלילה שקיים $0 \neq v \in \ker T \cap \operatorname{Im}T$. הנחנו $v \in \operatorname{Im}T$ ולכן הוא צ"ל של איברי הבסיס $v = \alpha_1Tu_1 + ... + \alpha_tTu_t$. $v \in \ker T$ ולכן $0 = Tv = T(\alpha_1Tu_1 + ... + \alpha_tTu_t)$ ולכן $\alpha_1T^2u_1 + ... + \alpha_tT^2u_t = 0$. אבל בגלל ש $\{T^2u_1,...,T^2u_t\}$ בסיס ובפרט בת"ל, יוצא ש $\alpha_1 = ... = \alpha_t = 0$ ולכן $v = 0$ בסתירה.