

תרגיל 5

26 בדצמבר 2016

1. א. הוכיחו: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.
ב. הוכיחו שהמשפחה $\{(A \setminus B), (B \setminus A), (A \cap B)\}$ זרה בזוגות.

פיתרון:

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \cup (A \cap B) = A. \\ (A \Delta B) \cup (A \cap B) &= ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) = A \cup B \end{aligned}$$

כאשר השיויון הראשון נובע מקיבוציות האיחוד. השני והשלישי מהגדרות שקולות של הפרש סימטרי. השיויון האחרון זה מתרגיל 3 שאלה 4 סעיף א, כיון ש $A \cap B \subseteq A \cup B$.

ב. ראשית:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \iff F \\ (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= \emptyset \text{ ולכן} \end{aligned}$$

בנוסף:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cap (A \cap B) &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \in B) \iff F \\ (A \setminus B) \cap (A \cap B) &= \emptyset \text{ ולכן} \end{aligned}$$

2. תהינה A, B קבוצות סופיות. הוכיחו שאם $|A|$ מספר זוגי ו- $|B|$ מספר אי-זוגי אז $|A \Delta B|$ מספר אי זוגי.

פיתרון:

נשים לב ש- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, וכיון ש $A \cap B \subseteq A \cup B$ נקבל, לפי תרגיל מהתרגול, ש $|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| \stackrel{*}{=} |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$, כאשר השיויון * נובע ממשפט ההכלה והדחה.

כעת, כיון ש $|A|$ מספר זוגי ו- $|B|$ מספר אי-זוגי אז הסכום שלהם הוא מספר אי זוגי, ואם מורידים ממנו מספר זוגי נשארים עם מספר אי זוגי.

3. לתכניות מתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטה נרשמו בסה"כ 150 סטודנטים. ידוע ש-115 סטודנטים נרשמו למדעי המחשב, ו-42 למתמטיקה. כמה סטודנטים נרשמו

לדו ראשי "מתמטיקה ומדעי המחשב"?

פיתרון:

נסמן ב- A את קבוצת הנרשמים למתמטיקה, וב- B למדעי המחשב. נקבל

$$|A| = 42, |B| = 115, |A \cup B| = 150$$

ולכן, לפי הכלה והדחה נוכל לחשב את החיתוך:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 115 + 42 - 150 = 7$$

4. מצאו 3 חלוקות לקבוצה $A = \{1, 2, 15, a, aba\}$, לפי הגדרת "חלוקה" שהוגדרה

בהרצאה.

פיתרון:

1. $\{\{1, 2\}, \{15\}, \{a, aba\}\}$

2. $\{\{1, 2, 15, a, aba\}\}$

3. $\{\{1, 2, aba\}, \{a, 15\}\}$

5. תהיינה A, B קבוצות סופיות.

א. תנו דוגמא לכך שלא תמיד מתקיים השיוויון: $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

ב. הוכיחו: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

ג. כפי שראינו, השיוויון בסעיף א לא תמיד נכון. מצאו, אם כן, את ההפרש:

$$|A \setminus B| - (|A| - |B|)$$

פיתרון:

א. כל דוגמא שבה $B \not\subseteq A$ טובה.

ב. \Rightarrow

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in A \setminus (A \cap B)$$

כי מי שלא נמצא ב- B בודאי לא נמצא ב- $A \cap B$.

\Leftarrow : נניח $x \in A \setminus (A \cap B)$ לכן $x \in A \wedge x \notin A \cap B$, כעת אם בשלילה $x \in B$

אז מהעובדה ש $x \in A$ נובע ש- $x \in A \cap B$ בסתירה. לכן $x \notin B$ ובסה"כ נקבל ש-

$$x \in A \setminus B$$

ג. ראינו ש- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, ושכיון שהן זרות אז $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$.

בנוסף, לפי שאלה 1 נקבל $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \setminus B| + |B|$

כעת מנוסחת הכלה והדחה נקבל:

$$|A \setminus B| + |B| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B \setminus A|$$

לאחר העברת אגפים נקבל

$$|A \setminus B| - (|A| - |B|) = |B \setminus A|$$