# פיסיקה למתמטיקאים

## תרגיל 4: משוואות אויילר לגראנג'

1. *The brachistochrone problem* בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה $(x_1,y_1)$ לנקודה $(x_2,y_2)$ לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה $x(\phi)=-a(\phi-\sin\phi), y(\phi)=a(1-\cos\phi),\ \ a<0$).

(א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

המיקום בקצה המסלול הוא $x(\pi)=-\pi a,\ \ y(\pi)=2a$, ולכן המרחק האפקי שיש לעבור, עם תאוצה קבועה $g\sin\theta=-g2a/\Delta$ הינו $\Delta=-a\sqrt{\pi^2+4}$. הזמן הדרוש לכך הוא

$$t_{1,2}^{lin}=\sqrt{\frac{-a(\pi^2+4)}{g}}.$$

(ב) הניחו פרמטריציה $\phi(t)=\{0\le t\le t_{1,2}^{cyc};\ \ \phi(0)=0,\phi(t_{1,2}^{cyc})=\pi\}$ וחשבו את $t_{1,2}^{cyc}=\int_1^2 ds/v$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=-2a\sin(\phi/2)\dot{\phi}dt$$

ו

$$y=2a\sin^2(\phi/2),$$

לכן

$$t_{1,2}^{cyc}=\sqrt{\frac{-a}{g}}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\phi}dt=\sqrt{\frac{-a}{g}}\int_0^{\pi}d\phi=\sqrt{\frac{-a}{g}}\pi.$$

(ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc}=\sqrt{1+4/\pi^2}$

$$t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc}=\sqrt{\frac{-a(\pi^2+4)/g}{-a\pi^2/g}}=\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\simeq 1.19,$$

כלומר, תנועה לאורך קו ישר ממושכת בכ $20\%$ יותר מאשר לאורך הציקלואידה !

2. הראו כי $t^{cyc}_{1,2}$ כאשר נוסעים מנקודה $(x_1, y_1)$ למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה $(x_1, y_1)$
(רמז: קבלו את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0-\cos\phi}}d\phi$, כאשר $\phi_0$ הזוית בנקודת ההתחלה, והראו כי הוא שווה ל $\pi$).

האנרגיה

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = ma^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi) + mga(1 - \cos\phi)$$

נשמרת (מדוע?) ולכן $E = mga(1 - \cos\phi_0)$.

נקבל

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{E - mga(1 - \cos\phi)}{ma^2(1 - \cos\phi)}} = \sqrt{\frac{mga(\cos\phi - \cos\phi_0)}{ma^2(1 - \cos\phi)}} = \sqrt{\frac{g(\cos\phi_0 - \cos\phi)}{-a(1 - \cos\phi)}},$$

ולכן

$$t^{cyc}_{1,2} \propto \int_{\phi_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}}d\phi = \pi.$$

3. גוף נע על פני המישור הדו־ממדי $(r, \theta)$ תחת השפעת הפוטנציאל המרכזי $U(r) = Ce^{-\alpha r}$.

(א) רשמו את הלגראנג'ין של המערכת

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - Ce^{-\alpha r}$$

(ב) קבלו את משוואות התנועה

משוואות התנועה הן

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 + \alpha Ce^{-\alpha r}, \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) &= 0. \end{aligned}$$

(ג) מהו התנע הזויתי? הראו כי הוא נשמר

מאחר ו $\theta$ קורדינטה ציקלית, התנע הזויתי $L = mr^2\dot{\theta}$ נשמר

(ד) ב $t=0$ מצב הגוף נתון ע"י

$$\begin{aligned} r(t=0) &= r_0, \\ \dot{r}(t=0) &= 0, \\ \dot{\theta}(t=0) &= \omega. \end{aligned}$$

מה יהיה מצב הגוף $(r,\dot{r},\dot{\theta})$ כאשר $t\to\infty$?

נרשום את האנרגיה של המערכת בצורה

$$E = T + U_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + Ce^{-\alpha r},$$

כאשר $U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + Ce^{-\alpha r}$ הפוטנציאל האפקטיבי. נשים לב גם כי ממשוואת התנועה עבור $r$, שניתנת לרישום בצורה

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_eff}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} + \alpha Ce^{-\alpha r},$$

נובע כי $\dot{r}$ עולה ממש (וכמובן שמאחר והאנרגיה סופית, גם חסומה). בנוסף, משימור אנרגיה נקבל ש $U_{eff}$ יורדת ממש ולכן $r$ עולה ממש ולא חסומה. אם כן

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} r &= \infty, \\ \lim_{t\to\infty} \dot{r} &= \sqrt{\frac{L^2}{m^2r_0^2} + \frac{2C}{m}e^{-\alpha r_0}}, \\ \lim_{t\to\infty} \dot{\theta} &= 0, \end{aligned}$$

כאשר הגבול האחרון נובע משימור תנע זויתי $\lim_{t\to\infty}\dot{\theta} = \lim_{t\to\infty}\omega r_0^2/r^2 = \lim_{r\to\infty}\omega r_0^2/r^2 = 0$.

4. שני מוטות חסרי מסה באורך $r$ כל אחד מחוברים בקצותיהם. מסה $m$ מקובעת באמצע כל אחד מן המוטות. המוט התחתון מוחזק אנכית, וקצהו מחובר לקרקע. המוט העליון מוסט בזוית $\epsilon$ ביחס למוט האנכי (איור $a$). מצאו את התאוצות הזויתיות ברגע בו משחררים את המוטות ממנוחה. (הניחו כי $\epsilon << 1$, רשמו את מיקומי המסות כמתואר באיור $b$ והשתמשו בקרוב זוית קטנות).

תהנייה $\theta_1(t),\ \theta_2(t)$ כמתואר באיור $b$. אזי מיקומי המסות התחתונה והעליונה, $(r\sin\theta_1, r\cos\theta_1),\ (2r\sin\theta_1 - r\sin\theta_2, 2r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2)$, בהתאמה. האנרגיה הקינטית של המסה התחתונה

$$E_b = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}_1^2$$

ואילו של העליונה נתונה ע"י

$$E_t = \frac{1}{2}mr^2\left((2\cos\theta\dot{\theta}_1 - \cos\theta_2\dot{\theta}_2)^2 + (-2\sin\theta_1\dot{\theta}_1 - \sin\theta_2\dot{\theta}_2)^2\right).$$

כעת נרשום בקרוב זוויות קטנות

$$E_t = \frac{1}{2}mr^2(2\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 + \mathcal{O}(\theta^4).$$

הלגראנג'יאן בקרוב זוויות קטנות ($\mathcal{O}(\theta^3)$) הוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2(5\dot{\theta}_1^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - mgr(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2),$$

ומשוואות התנועה עבור $\theta_1, \theta_2$ הן

$$5\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{\theta}_2 = \frac{3g}{r}\theta_1,$$

$$-2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = \frac{g}{r}\theta_2.$$

ברגע שמשחררים את המוטות, $\theta_1 = 0$ ו $\theta_2 = \epsilon$ (איור $a$) ולכן פתרון משוואות התנועה עבור $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ ייתן

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{2g}{r}\epsilon,\ \ \ddot{\theta}_2 = \frac{5g}{r}\epsilon.$$