פתרון – תרגיל בית 2 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

1) מזכירה מבולבלת הכניסה באקראי n מכתבים ל-n תאים – מכתב אחד לכל תא. מהי תוחלת מספר הממוענים שקיבלו את מכתבם שלהם?

פתרון:

נפתור בעזרת משתנה אינדיקטור. נסמן ב-X_k את המשתנה המקבל ערך 1 אם הנמען ה-k קיבל את מכתבו ו-0 אחרת, כאשר $1 \le k \le N$. הסיכוי שהנמען ה-k יקבל את מכתבו הוא $\frac{1}{N}$. לכן $E(X_k)=\frac{1}{N}$. כעת $X_1+\ldots+X_N$ הוא מספר האנשים שיקבלו את מכתבם. אזי,

$$E(X_1+\ldots+X_N)=E(X_1)+\ldots+E(X_N)=N\cdot\frac{1}{N}=1$$

2) מס' הצימוקים בעוגיה מתפלג פואסונית עם ממוצע 3 צימוקים. הקונדיטוריה מבטיחה: "לפחות שני צימוקים בעוגיה או שכספך יוחזר".

א. מהי ההסתברות שלא תצטרך לשלם עבור עוגיה אקראית שקנית?

ב. בגוש בצק המיועד ל-150 עוגיות, מבקשים להכניס n צימוקים באופן שיבטיח, בהסתברות של 0.95, שלא יוחזר כסף לקונה? מצא את n.
(אפשר להסתפק בביטוי הכולל רק את n כמשתנה).

פתרון:

א). $X \sim Poi(3)$, לכן

$$P\left(X<2\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)$$

$$=\frac{e^{-3}3^0}{0!}+\frac{e^{-3}3^1}{1!}\approx 0.2$$

ב). עלינו למצוא את $\lambda=n/150$, כך שיתקיים $P\left(X\ge 2\right)=0.95$.

$$P\left(X\ge 2\right)=0.95 \qquad \Rightarrow P\left(X<2\right)=0.05$$

$$P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=0.05$$

$$0.05=\frac{e^{-n/150}\left(n/150\right)^0}{0!}+\frac{e^{-n/150}\left(n/150\right)^1}{1!}=e^{-n/150}+\left(n/150\right)e^{-n/150}$$

ומקבלים $n\approx 237.2$. לכן צריך לפחות 238 צימוקים לקבל את הסתברות המבוקשת.

3) אריק ובנץ משחקים בסדרת המשחקים הבאה: בכל משחק מטיל כל שחקן קובייה. אם אחד מהם מקבל מספר גבוה יותר מחברו הוא מקבל מטבע אחד מהקופה (אם יש שוויון אף אחד לא מקבל מטבע).

א. יהי X מ"מ המייצג את הרווח של אריק בסדרה של 10 משחקים. מהי התפלגות X? מהי תוחלתו? מהי שונותו?

ב. בקופה 9 מטבעות בלבד. מה ההסתברות שהם לא יספיקו לסדרה של 10 משחקים?

ג. כמה משחקים בממוצע ישחקו אריק ובנץ עד שישולם המטבע הראשון מהקופה? לכמה משחקים יספיקו בממוצע 9 מטבעות שבקופה?

פתרון:

א) בשאלה זאת נתונים 10 ניסויים ברנולי. נסמן "הצלחה" = מספר גבוה יותר בקוביה של אריק. נסמן ב-X את הרווח של אריק בסידרת 10 המשחקים.

$$P = 15/36 \Rightarrow X \sim Bin(10, 15/36) \Rightarrow$$

$$E(X) = 10 \cdot 15/36, V(X) = 10 \cdot 15/36 \cdot 21/36$$

ב) נסמן ב-Y את הרווח של בנץ בסידרת 10 המשחקים, המאורע המבוקש 10=X+Y

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$X+Y \sim Bin(10, 30/36) \Rightarrow P(X+Y=10) = (5/6)^{10}$$

ג) ההסתברות שהקופה תשלם מטבע במשחק בודד היא 36/30. לכן מספר המשחקים Z עד לתשלום המטבע הראשון מתפלג גאומטרי עם הסתברות 5/6, ומספר המשחקים הממוצע עד לתשלום מטבע הוא 6/5 (תוחלת). מתכונת חוסר זיכרון נקבל: 9*(1.2) משחקים בממוצע יוכלו להתבצע מ-9 מטבעות.

סה"כ 10.8 משחקים.

4) יהי $X \sim Poi(\lambda)$ $\left(\lambda > 0\right)$ מ"מ המייצג את מספר הסועדים הנכנסים למסעדה ביום. ההסתברות שסועד יהנה מארוחתו היא קבועה בהסתברות קבועה $0 < p < 1$ ובלתי תלויה בסועדים הנוספים.

א. מהי פונקצית ההסתברות של מספר הסועדים שיהנו מהארוחה?

ב. נגדיר את שני המאורעות הבאים A ו-B:

A={K אנשים סועדים יהנו מהארוחה}, B={J סועדים לא יהנו מהארוחה}.

K+J = סה"כ מספר הסועדים ביום.

האם המאורעות A ו-B בלתי תלויים או תלויים? הראה זאת בחישוב מתאים.

<u>פתרון:</u>

N = מספר האנשים שיגיעו למסעדה

X = מספר הסועדים שיהנו מהארוחה. Y = מספר הסועדים שלא יהנו מהארוחה.

א.

$$\begin{aligned}
p_X(k) &= P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=k|N=n)}_{=0 \text{ אם } n<k} P(N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{k \text{ הצלחות מתוך } n} \underbrace{e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}}_{\text{נתון}} = \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}}_{e^{\lambda q}} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \qquad\qquad k = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}$$

<u>מסקנה:</u> $\boxed{X \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)}$

ב. מתוך סעיף א'

$$P(A) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \qquad\qquad P(B) = \underbrace{e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^j}{j!}}_{\text{"הצלחה"} \leftrightarrow \text{"כשלון"}}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{P(A\cap B)} &= P\left(\{k \text{ סעדים נהנים}\} \cap \{j \text{ סעדים לא נהנים}\}\right) \\
&= P\left(\{k \text{ סעדים נהנים}\} \cap \{k+j \text{ סעדים הגיעו}\}\right) \\
&= P\left(\{k+j \text{ סעדים הגיעו}\} P\left(\{k \text{ סעדים נהנים}\} \mid k+j \text{ סעדים הגיעו}\}\right)\right. \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}\binom{k+j}{k} p^k q^j = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+j} p^k q^j}{k!j!} = \boxed{P(A)P(B)}
\end{aligned}$$

קיבלנו שהמאורעות A ו-B בלתי תלויים.

5) נבחר באקראי מספר X מבין המספרים 1,2,3,4,5. אחר כך נבחר מספר נוסף Y מבין המספרים הנ"ל, אבל לא גדול מ-X (זאת אומרת Y נבחר מ- 1,...,X).

א. מצא את ההתפלגות המשותפת של הזוג (X,Y) ואת ההתפלגות $P_Y(y)$.

ב. מצא את $P(X=2|Y=1)$.

ג. האם X ו-Y בלתי תלויים? הראה זאת.

פתרון:

א). טבלת ההתפלגות המשותפת של (X,Y) + ההתפלגויות השוליות

X \ Y	1	2	3	4	5	$P_x(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	1/5
2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$	0	0	0	1/5
3	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$	0	0	1/5
4	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	0	1/5
5	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$	1/5
$P_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{27}{300}$	$\frac{12}{300}$	1

ההתפלגות (השולית) $P_Y(y)$ נתונה בשורה האחרונה בטבלה.

ב). $P(X=2|Y=1)=\dfrac{P(X=2\cap Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{1/10}{137/300}=\dfrac{30}{137}\approx 0.219$

ג). X ו-Y אינם ב"ת כי למשל:

$$P(X=1\cap Y=1)=\frac{1}{5}\neq P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{137}{300}$$

(ניתן גם לראות שיש אפסים בטבלה).