תרגיל בית 13 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי G חבורה סופית, יהי p ראשוני, ותהי P תת־חבורת p-סילו של G. תהי $H \leq G$ תת־חבורת-p כלשהי של G.

א. הוכיחו שאם HP תת־חבורה של G, אז $H \leq P$. רמז: העזרו במסקנה האחרונה בשאלה השלישית בבוחן השני כדי להראות כי HP היא חבורת-p.

ב. נניח כי $H \leq N_G(P)$. הוכיחו כי $H \leq P$. רמז: הסעיף הקודם.

ג. הוכיחו כי H מוכלת בתת־חבורה p-סילו כלשהי של G. רמז: התבוננו בפעולה של H על $\mathrm{Syl}_p(G)$ לפי הצמדה והסבירו למה יש לפעולה נקודת שבת. כעת העזרו בסעיף הקודם.

שאלה 2. רמז: $120 = 5!$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 120 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 היא לא פשוטה. רמז: בדקו מתי $n_5 = m \neq 1$, הסתכלו על העתקה $G \to S_m$ והאם היא לתוך A_m.

שאלה 3. רמז: $5782 = 2 \cdot 7^2 \cdot 59$.

א. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 5782 היא פתירה.

ב. הוכיחו שכל חבורה מסדר 5782 היא לא פשוטה.

שאלה 4. תהי $G = D_5 \times U_7$.

א. מצאו את איברי תת־חבורת הקומוטטורים G'.

ב. האבליניזציה $\overline{G} = {}^{G}/_{G'}$ היא חבורה אבלית סופית. מצאו את הצורה הקנונית שלה, כלומר מצאו מספרים d_i כך ש-$\overline{G} \cong \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_n}$ כאשר $d_i | d_{i+1}$.

שאלה 5. חבורה G תקרא מטא-אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית $N \lhd G$ כך שגם N אבלית וגם ${}^{G}/_{N}$ אבלית. רמז כללי: נסו להשתמש במשפטי האיזומורפיזמים.

א. הוכיחו שחבורה G היא מטא-אבלית אם ורק אם G' היא אבלית (הבינו למה זה שקול לכך שכל שני קומוטטורים של איברי G מתחלפים).

ב. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

ג. הוכיחו שכל חבורת מנה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

שאלה 6. תהי $\mathcal{V}$ המחלקה של כל החבורות הפתירות.
רשות: אפשר לפתור את השאלה גם עבור המחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות.

א. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתת־חבורות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $H \leq G$ גם $H \in \mathcal{V}$.

ב. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתמונות הומומורפיות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $K \lhd G$ גם ${}^{G}/_{K} \in \mathcal{V}$.

ג. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה למכפלה ישרה סופית. כלומר אם $G, H \in \mathcal{V}$, אז גם $G \times H \in \mathcal{V}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. תהי G חבורה פתירה. נגדיר את דרגת הפתירות של G להיות המספר $t \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G^{(t)} = \{e\}$.
באופן דומה מגדירים לחבורה נילפוטנטית את דרגת הנילפוטנטיות שלה להיות המספר $c \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G_c = \{e\}$ (האיבר ה-c בסדרה המרכזית היורדת).
לדוגמה, חבורה מדרגת פתירות 1 או דרגת נילפוטנטיות 1 היא אבלית, כי $G^{(1)} = \{e\} = G_1$.

א. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הפתירות של D_n היא 2.

ב. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הנילפוטנטיות של D_{2^n} היא $n-1$.

ג. הראו שהמחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות לא סגורה למכפלה ישרה אינסופית.

שאלה 8. נראה שישנן חבורות שבהן תת־חבורת הקומוטטורים מכילה איברים שאינם קומוטטורים.

א. נסמן $G = GL_2(\mathbb{R})$. הוכיחו $G' \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ (למעשה יש שיוויון) וכי $-I_2 \in G'$.

ב. יותר קשה: הוכיחו כי $-I_2 \in G'$ הוא קומוטטור של איברי G, אבל לא של איברי G'. נסו להציג אותו כמכפלה של קומוטטורים של G'.

ג. תהי H חבורה שבה $[H : Z(H)]^2 < |H'|$. הוכיחו כי H' מכילה איברים שאינם קומוטטורים. רמז: קודם הראו ש-$[ay, bz] = [a, b]$ לכל $a, b \in H$ ו-$y, z \in Z(H)$.
הערה: לכל p ראשוני קיימות חבורות-p מטא-אבליות שמקיימות את התנאי הזה.

בהצלחה!