הרצאה 8

הגדרה יהי K שדה. הערכה לא-ארכימדית על K היא פונקציה $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ כך ש-:

1) $|x| = 0 \iff x = 0$

2) $|xy| = |x|\cdot|y|$ לכל $x,y \in K$

3) $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

דוגמאות 1) K שדה מספרים, $0 \neq \wp \lhd O_K$, אז

$$q = |O_K/\wp| \qquad |x|_\wp = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ q^{-c}, & \underbrace{xO_K}_{\text{אידאל שבר}} = \wp^c I \end{cases}$$

I אידאל שבר זר ל-$\wp$.

$$v_\wp(x) = c = -\frac{\log |x|_\wp}{\log q}$$

$$v_\wp(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : x \in \wp^n\}$$

2) F שדה, $K = F(x)$ פונקציות רציונליות

$K = F((x))$ טורי לורן

כל איבר לא אפס של K ניתן כמו

$$f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \qquad n_0 \in \mathbb{Z}, \ a_n \in K \qquad v(f) = \deg f$$

$$|f| = e^{-\deg f} \qquad \deg f = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$$

הגדרה
בהינתן שדה K. הערכה חיבורית על K הינה פונקציה $v: K \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ כך ש:-

1) $v(x)=\infty \iff x=0$.

2) $v(xy)=v(x)+v(y)$ לכל $x,y\in K$.

3) $v(x+y)\geq \min\{v(x),v(y)\}$ לכל $x,y\in K$.

אבחנה בהינתן הערכה לא-ארכימדית על K, $v(x)=-\log|x|$ נותן הערכה חיבורית

$$|x|=e^{-v(x)}$$

אבחנה שני הערכות חיבוריות שקולות $\iff$ אחת הינה כפל סקלרי של השניה.

הגדרה הערכה לא-ארכ' נקראת בדידה אם קיים $\max\{|x| : x\in K, |x|<1\}$ $\iff$

אם קיים מינ' של $\min\{v(x): x\in K, v(x)>0\}$.

סימון
$$\mathcal{O}=\{x\in K : |x|\leq 1\} = \{x\in K : v(x)\geq 0\}$$
חוג ההערכה (ההגדרה תלויה רק במחלקת השקילות של $|\cdot|, v$).

החוג $\mathcal{O}$ הינו מקומי, והאידיאל המקסימלי הינו

$$\underline{m} (=\wp) = \{x\in K : |x|<1\} = \{x \in K : v(x)>0\}$$

לכל $x\in K$

אם $|x|=1$, אזי $|x^{-1}|=1$, לכן $x\in \mathcal{O}^*$ ולהיפך.

<u>תזכורת</u> נניח כי $|\cdot|$, v בדידה.

אזי $v(K) = m\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$

כאשר $m=\min\{v(K)\cap \mathbb{R}_{>0}\}$.

<u>הוכחה</u> יהי $a\in K$ כך ש- $v(a)=m$. אזי $v(a^n)=nm$

לכל $n\in\mathbb{Z}$ ולכן $m\mathbb{Z}\subseteq v(K)$.

להיפך, נניח בשלילה כי קיים $0\neq b\in K$, $v(b)\notin m\mathbb{Z}$ אזי
נחליף b בהופכי שלו אם צריך. נניח $v(b)>0$

$$nm < v(b) < (n+1)m$$

$0 < v\left(\frac{b}{a^n}\right) = v(b) - nv(a) < m$ בסתירה למינימליות של m.

<u>הגדרה</u> v נקראת מנורמלת אם $v(K^*) = \mathbb{Z}$.

<u>דוגמאות</u> של הערכות לא בדידות:

1) טורי פויזו (Puiseux)

$$K\{\{x\}\} = \Big\{ f=\sum_{b\in\mathbb{Q}} a_b x^b \ : \ \text{החזקות עם מקדמים לא אפסיים חסומות מלרע והמכנים שלהם חסומים מלעיל} \Big\}$$

$$v(f) = \deg(f) = \min\{ b\in\mathbb{Q} : a_b \neq 0 \}$$

ההערכה לא בדידה, כי $v(x^b)=b$ לכל $b\in\mathbb{Q}$.

2) K שדה עם הערכה לא-ארכי' שלמה. ניתן להוכיח שאפשר לפעמים להרחיב את $|\cdot|$ על הסגור האלגברי $\bar{K}$.

לכל $a\in K^*$, $|a|\neq 1$: $\quad |\sqrt[n]{a}| = |a|^{\frac{1}{n}} \to 1$

ההערכה על $\bar{K}$ לא יכולה להיות בדידה.

<u>משפט</u> (אוסטרובסקי) כל שדה שלם ביחס להערכה ארכימדית איזומורפי ל- $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם הערך המוחלט הרגיל.
הומאומורפי.

<u>דוגמא</u> תהי L/K הרחבה של שדות מספרים. יהי $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$

פירוק ראשוני: $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = P_1^{e_1}\cdots P_r^{e_r}$.

יהי $\alpha\in K$. נניח כי $v_\wp(\alpha)=c$.

$$\alpha O_K = \wp^c I$$

$$\alpha O_L = (\wp O_L)^c (I O_L) = P_1^{e_1 c} P_2^{e_2 c} \cdots P_r^{e_r c}$$

$$v_{P_i}(\alpha) = e_i c$$

בפרט יש r הערכות לא שקולות שונות של L שמרחיבות את $v_\wp$, כלומר

$$\left.\frac{v_{P_i}}{e_i}\right|_K = v_\wp .$$

<u>הגדרה</u> יהי K שדה עם הערכה בדידה v. יהי

$$m=\min\{v(K)\cap \mathbb{R}_{>0}\}.$$

איבר $\pi\in O$ עם $v(\pi)=m$ נקרא אוניפורמיזנטה (מאחד)

אם v מנורמלת אזי $(v(\pi)=1)$.

<u>טענה</u> (v בדידה) יהי $\wp$ האידיאל המקסימלי של O.

אזי $\wp=(\pi)$ וכל האידיאלים של O הינם

$$\wp \supsetneq \wp^2 \supsetneq \wp^3 \supsetneq \cdots \supsetneq \cdots (0)$$

<u>הוכחה</u> $\pi \in \wp$, אז $x\in\wp \Rightarrow v(x)\ge v(\pi) \Rightarrow \frac{x}{\pi}\in\mathcal{O} \Rightarrow$

$v(x\pi^{-1}) = v(x) - v(\pi) \ge 0$

$\Rightarrow x \in \pi\mathcal{O}$

$\wp = \pi\mathcal{O}$.

יהי $I\neq 0$ אידיאל כלשהו של $\mathcal{O}$, יהי $a\in I$

איבר עם הערכה מינימלית. לכן $v(a)=nm$, $n\in\mathbb{N}$,

אז $v(a)=v(\pi^n)$, לכן a, π^n חברים, לכן

$I \supseteq (a) = (\pi^n) = \wp^n$. מצד שני, לכל $b\in I$, $\frac{b}{a}\in\mathcal{O}$,

לכן $I\subseteq (a) = \wp^n \Rightarrow I=\wp^n$.

לכן I מהווה ראשי, לכן מחוג נתרייני, לכן $\wp^n$ כולם שונים

<u>מסקנה</u> יהי K ש.ד. עם הערכה בדידה. יהי $x\in K^*$.

אז $\underline{x=u\pi^n}$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$, $u\in\mathcal{O}^*$.

באופן יחיד

$v(x)=nm$.

<u>השלמה</u> יהי K עם הערכה $|\cdot|$

$$\hat{K} = \text{(סדרות קושי)} \,/\, \text{(סדרות אפסיות)}$$

הוכחנו, בהינתן סדרת קושי a_n, $\{|a_n|\}$ מתכנסת.

הינה סדרת קושי של ממשיים, לכן מתכנסת, לכן מוגדרת $|\{a_n\}| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$.

נניח כי $|\cdot|$ לא ארכימדי. אזי אם $|x|\neq|y|$ אזי
$|x+y| = \max\{|x|,|y|\}$.
$v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\} \Leftarrow v(x)\neq v(y)$

זה אומר שאם $\{a_n\}$ סדרת קושי לא אפסית, אזי הסדרה $|a_n|$ מתייצבת. אכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש- $|a_n-a_m|<\varepsilon$ לכל $N<n,m$. אם קיים $N<n$ כך ש- $\varepsilon<|a_n|$, אזי לכל $N<m$
$|a_m| = \max\{|a_n|, |a_n-a_m|\} = |a_n|$.
אם לא קיים שום $\varepsilon>0$ אשר n גדול כרצוני עם $\varepsilon<|a_n|$, זה אומר כי $\{a_n\}$ אפסית.

<u>מסקנה</u>

$|\hat{K}| = |K|$
$v(\hat{K}) = v(K)$.

טענה: יהי K שדה מספרים, $\mathfrak{p} \trianglelefteq O_K$ אידיאל ראשוני.

$$O_K \subsetneq O = \{x \in K : v_\mathfrak{p}(x) \geq 0\} = \left\{x = \frac{a}{b} : \begin{matrix} a, b \in O_K \\ b \notin \mathfrak{p} \end{matrix}\right\}.$$

יהי $K_\mathfrak{p}$ ההשלמה של K ביחס ל- $v_\mathfrak{p}$

($\mathbb{Q}_p$ ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס ל- v_p) אזי $\hat{O} = \{x \in \hat{K} : v_\mathfrak{p}(x) \geq 0\}$

היינו הסגור של O_K בטופולוגיה המטרית של $\hat{K}$.

הוכחה: יהי $\overline{O_K}$ הסגור של O_K. יהי $x \in \overline{O_K}$.

תהי $\{a_n\}$ סדרת קושי, $a_n \in O_K$, $a_n \to x$

($\{a_n\}$ שייכת למחלקה x).

$a_n \in O_K \Rightarrow a_n \in O \Rightarrow v_\mathfrak{p}(a_n) \geq 0 \Rightarrow v_\mathfrak{p}(x) = \lim_{n\to\infty}(v_\mathfrak{p}(a_n)) \geq 0$

$\Rightarrow x \in \hat{O}$.

בכיוון השני: נניח $x \in \hat{O}$, תהי $\{a_n\}$ סדרת קושי

כך ש- $a_n \to x$. אם $x = 0$ הטענה ברורה, אחרת נניח

שלא. אם כן הסדרה $\{|a_n|_\mathfrak{p}\}$ מתייצבת, לכן בה"כ

$v_\mathfrak{p}(a_n) \leq 1$ לכל n, אזי $a_n \in O$.

אזי $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ כאשר $c_n \notin \wp$, $b_n, c_n \in \mathcal{O}_K$

לכל n קיים $y_n \in \mathcal{O}_K$ כך ש- $y_n c_n \equiv b_n \bmod \wp^n$.

$v_\wp(c_n) = 0$ (c_n הפיך ב- $\mathcal{O}_K/\wp^n$).

אזי $v_\wp(y_n c_n - b_n) \geq n$ $\Leftarrow$ $v_\wp\left(y_n - \frac{b_n}{c_n}\right) \geq n$

$$|y_n - a_n|_\wp \leq q^{-n}$$

אזי $\{y_n - a_n\}$ אפסית, לכן $y_n \to x$. אז $y_n \in \mathcal{O}_K$.

לכן $\hat{\mathcal{O}} \subseteq \overline{\mathcal{O}_K}$.

__תרגיל__ $\hat{\mathcal{O}}$ הינו ההשלמה של $\mathcal{O}_K$ ביחס לטופולוגיה ה-$\wp$-אדית

במובן שראינו בקורס של חוגים.

__הערה__ K שדה עם הערכה v (לא-ארכי) כלשהי.

אזי $\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$, $\hat{\mathcal{O}} = \{x \in \hat{K} : v(x) \geq 0\}$. אזי $\hat{\mathcal{O}}$ הינו הסגור של $\mathcal{O}$.

אותה הוכחה כמו קודם.

<u>טענה</u> K עם הערכה כנ״ל אזי $\hat{O}/\hat{\wp} \simeq O/\wp$

$\hat{\wp} = \{x\in \hat{K} : v(x)>0\}$ האידיאל המקסימלי של $\hat{O}$.

<u>הוכחה</u> נגדיר ~~הומומורפיזם~~ $f: O \longrightarrow \hat{O}/\hat{\wp}$

$a=(a,a,a,\dots)\in \hat{O}$ $\quad f(a) = a+\hat{\wp}$

ברור כי $\ker f = O\cap \hat{\wp} = \wp$

f על כי $x\in\hat{O}$, $a_n\to x$. לכל סכרמ n,m,

$|a_n-a_m|<1$, לכן $a_n-a_m\in\wp$.

$x-a_n=\{a_m-a_n\}\in\hat{\wp}$, לכן $f(a_n)=x+\hat{\wp}$.

לכן $\hat{O}/\hat{\wp} \simeq O/\wp$.

אם ההערכה v בדידה אזי $\hat{O}/\hat{\wp}^n \simeq O/\wp^n$ לכל n טבעי:

כי אם v בדידה אין אפשר לפתרון אלא $\wp^n$

כי $\wp^n=\{x\in K : v(\wp)\geq nm\}$.

<u>טענה</u> K שדה עם הערכה בדידה. יהי $\pi\in\mathcal{O}$ מאחד.

נקבע קבוצה S של נציגים של קוסטים ב- $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$.

אזי

$$\hat{\mathcal{O}}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\pi^n \;:\; a_n\in S\right\}$$

נשים לב כי $|a_n\pi^n|\le|\pi|^n\to 0$ $(|\pi|<1)$, לכן הטור (סדרת סכומים חלקיים) מתכנס.

הטענה אומרת שבכל מחלקה $x\in\hat{\mathcal{O}}$ יש בדיוק טור אחד מן הצורה הנ"ל.

<u>הוכחה</u> ברור כי $\sum a_n\pi^n\in\hat{\mathcal{O}}$ כי $\hat{\mathcal{O}}$ הסגור של $\mathcal{O}$.

מצד שני, יהי $x\in\hat{\mathcal{O}}$. קיים $a_0\in S$ יחיד כך ש- $a_0\equiv x \mod \hat{\mathfrak{p}}$. קיים a_1 יחיד כך ש- $\frac{x-a_0}{\pi}\equiv a_1 \mod \hat{\mathfrak{p}}$, ...

$(\hat{\mathfrak{p}}=(\pi)\hat{\mathcal{O}})$

משפט (למה של הנזל). יהי K שדה **שלם** עבור הערכה לא ארכימדית. יהי $f(x)\in \mathcal{O}[x]$.

$k=\mathcal{O}/\wp$ שדה השאריות. נניח כי $\bar{f}(x)=\bar{g}(x)\bar{h}(x)\in k[x]$

כאשר $\bar{g},\bar{h}$ איברים זרים של החוג $k[x]$. אזי ניתן "להרים את הפירוק ל-$\mathcal{O}$" כלומר קיימים $g,h\in \mathcal{O}[x]$ כך ש- $f(x)=g(x)h(x)$

$\bar{g},\bar{h}$ הינן הרדוקציות של g,h.

$\deg g=\deg \bar{g}$.

הוכחה בונים בניה סדרות של פולינומים g_n,h_n כך ש-

$$g_n\equiv g_{n-1} \bmod \pi^n$$
$$h_n\equiv h_{n-1} \bmod \pi^n$$
$$f\equiv g_nh_n \bmod \pi^{n+1}$$

עבור איבר $\pi\in\wp$ מתאים.

$|\pi|<1$

$|\pi^n|\to 0$

אם $|\cdot|$ בדידה, ניתן לקחת π מאחיד.

אם $|\cdot|$ לא בדידה, צריך לחשוב איך לבחור את π. סיבוך קטן בהוכחה. (עמוד 129 ב-Neukirch).

הגדרה שדה עם הערכה לא־ארכ׳ נקרא הנזלי אם החוג O מקיים את הלמה של הנזל.

הלמה של הנזל טוענת: K שלם $\Leftarrow$ K הנזלי!

דוגמה יהי K שדה הנזלי, יהי $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0\in K[x]$ פולינום אי־פריק. אזי $a_n\neq 0$

$$\max\{|a_n|,|a_{n-1}|,\dots,|a_0|\}=\max\{|a_n|,|a_0|\}$$

הוכחה יהי i האינדקס המינימלי כך ש- $|a_i|=\max$

נוכל לחלק את $f(x)$ ב- a_i ולהניח בה״כ כי $f(x)\in O[x]$ וקיים לפחות מקדם אחד הפיך. אם $0<i<n$, אזי

$$\bar f = x^i\underbrace{(\bar a_n x^{n-i}+\dots+\underbrace{\bar a_i}_{\neq 0})}_{\text{לא מתחלק ב-}x}$$

לכן זר ל-x.

לפי הלמה של הנזל מקבלים פירוק $f(x)=g(x)h(x)$, $\deg\bar g=i$, בסתירה, לאי־פריקות.

טענה בחוג $\mathbb{Z}_p$ יש $p-1$ שורשים $(p-1)$-יים של 1 שונים.

הוכחה

$$x^{p-1}-1=\prod_{a\in\mathbb{F}_p^*}(x-a)$$

לפי הלמה של הנזל ניתן להרים את הפירוק הזה ל- $\mathbb{Z}_p[x]$.

לכל איבר $a\in\mathbb{F}_p\simeq \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ מקבלים נציג יחיד ב-$\mathbb{Z}_p$.

נציגים יחידיים

$$[a]=\begin{cases}0, & a=0\\ \text{שורש } (p-1)\text{-י של } 1, & a\neq 0\end{cases}$$

נציגים של Teichmüller.