מקליד: עידן אריה
מרצה: ד"ר אורן קאפח
תאריך: 2019-06-12

גרפיקה ממוחשבת
89-663-01

צורות בסגנון חופשי

נרצה דרך לתאר ולצייר משטחים לא ישרים.
אם יש לנו אוסף של נקודות, ורוצים להעביר קו, יש שתי גישות:

1. אינטרפולציה - קו **שעובר** דרך **כל** הנקודות.
2. אפרוקסימציה - קו שעובר קרוב ככל האפשר לכל הנקודות.

פולינום

הדרך הפשוטה ביותר היא פולינום - דרך N נקודות יש פולינום ממעלה $N-1$ שעובר דרך כולן. במקרה של שתי נקודות, הconstraints שלנו הם:

$$x\left(0\right)=a_x=P_0^x \qquad x\left(1\right)=a_x+b_x=P_1^x$$

נפתור כדי למצוא את המקדמים של $x\left(u\right)$:

$$a_x=P_0 \qquad b_x=P_1^x-P_0^x$$

$$\implies x\left(u\right)=P_0^x+\left(P_1^x-P_0^x\right)u$$

ואם נפתור עבור $\begin{bmatrix}x\left(u\right) & y\left(u\right) & z\left(u\right)\end{bmatrix}$:

$$V\left(u\right)=\begin{bmatrix}x\left(u\right)\\ y\left(u\right)\\ z\left(u\right)\end{bmatrix}=P_0+\left(P_1-P_0\right)u$$

יתרונות:
- מדוייק

חסרונות:
- למקדמים של הפולינום אין שום משמעות גיאומטרית.
- שינוי קטן של נקודה יכול לשנות בצורה דרמטית את מקדמי הפולינום.
- אין לנו local operations - שינויים קטנים עם תוכנת עריכה משנים בצורה חדה את הייצוג.

הפתרון:

Polynomial Splines

לוקחים את העקומה וחותכים אותה למקטעים, שכל מקטע ניתן לייצור ע"י פולינום ממעלה נמוכה.

יתרונות:
- מדוייק
- מקבלים פולינומים ממעלה נמוכה.
- אפשר לבצע פעולות נקודתיות.
- אפשר לייצר מקדמים בעלי משמעות גיאומטרית

הגדרה - Tangent Vector

יהי $V\left(u\right)=\left[x\left(u\right),y\left(u\right),z\left(u\right)\right]$ עבור $u\in\left[0,1\right]$ עקומה פרמטרית רציפה ב-$\mathbb{R}^{3}$. אזי הtangent vector ב-u_{0} הוא:

$$\vec{T}\left(u_{0}\right)=V'\left(u_{0}\right)=\frac{\mathrm{d}V\left(u\right)}{\mathrm{d}u}|_{u=u_{0}}=\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right]_{u=u_{0}}$$

בעצם $V\left(u\right)$ הוא הtrajectory בכל נקודה. הוא צריך להיות רציף גיאומטרית - כלומר רציף מבחינת כיוון אבל לאו דווקא מבחינת גודל - כלומר $V_{1}'\left(1\right)=\alpha V_{2}'\left(0\right)$. ככל שניקח פולינום ממעלה יותר גבוהה נוכל ליצור רציפות יותר גבוהה.

Liner Spline

הspline הכי פשוט - לכל מקטע ניקח פונקציה לינארית. אבל כדי שלמקדמים תהיה משמעות גיאומטרית נציג אותם בצורה קצת אחרת.
הנוסחאות הבסיסיות הן:

$$x\left(u\right)=a_{x}u+b_{x}$$

$$y\left(u\right)=a_{y}u+b_{y}$$

$$z\left(u\right)=a_{z}u+b_{z}$$

עבור $u\in\left[0,1\right]$, נגדיר:

$$U^{T}\left(u\right)=\begin{bmatrix}u & 1\end{bmatrix}\qquad Q=\begin{bmatrix}a_{x} & a_{y} & a_{z}\\ b_{x} & b_{y} & b_{z}\end{bmatrix}$$

ואז נוכל לכתוב את העקומה בתור:

$$\begin{bmatrix}x\left(u\right) & y\left(u\right) & z\left(u\right)\end{bmatrix}=V^{T}\left(u\right)=U^{T}\left(u\right)Q$$

המקדמים של Q לא ידועים, וצריך לחשב אותם. לשם כך צריך לספק constraint - למשל $p_{0}^{T}=U^{T}\left(0\right)Q$. אם יש לנו 2 constaints כאלה נוכל לחשב:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}p_{0}^{T}\\ p_{1}^{T}\end{bmatrix}}_{G}=\underbrace{\begin{bmatrix}U^{T}\left(0\right)\\ U^{T}\left(1\right)\end{bmatrix}}_{M}Q$$

כלומר

$$G=MQ\implies M^{-1}G=Q$$

G זה המגבלות הגיאומטריות, ויש להן משמעות גיאומטרית. M היא מטריצה קבועה - ולכן גם M^{-1} קבועה, ולא משתנה כאשר המגבלות הגיאומטריות משתנות. לכן אם נחליף את Q ב-$M^{-1}G$ נקבל:

$$V^{T}\left(u\right)=U^{T}\left(u\right)M^{-1}G$$

כאשר:	M^{-1}	מטריצת הבסיס. לא תלויה במגבלות גיאומטריות - קבועה לכל סוג של spline.
	$U^{T}M^{-1}$	המטריצה של פונקציית הblending
	G	ÚÉØÈÎÅÀÉÂÄ ÄÖÉØÈÎÄ

למשל:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_0^x & p_0^y & p_0^z \\ p_1^x & p_1^y & p_1^z \end{bmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}}_{Q}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix}}_{V^T(u)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix}}_{U^T(u)} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_0^T \\ p_1^T \end{bmatrix}}_{G}$$

$$V^T(u) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix}}_{\text{blending function}} \begin{bmatrix} p_0^T \\ p_1^T \end{bmatrix}$$

הרציפות היא C_0. אם רוצים רציפות יותר גבוהה צריך פולינום ממעלה יותר גבוהה. נשים לב גם שהמגבלות לא חייבות להיות דווקא מיקומי נקודות!

Cubic Spline Interpolation

$$x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$$

$$y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y$$

$$z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z$$

כמו קודם, נגביל $u \in [0,1]$ ונגדיר:

$$U^T(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

ונכתוב

$$\begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix} = V^T(u) = U^T(u)\,Q$$

Hermite Interpolation

במקום מגבלות של 4 נקודות, ניתן בתור מגבלות את נקודות ההתחלה והסיום - ואת הtangent בנקודת ההתחלה ובנקודת הסיום.

נשים ♡:
- הtangent זה בעצם הנגזרת.
- אם נשמור על אותה נגזרת בין החלקים של הspline, נקבל אוטומטית רציפות C_1.

נחשב. יש לנו:

$$V^T(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} Q$$

נגזור:

$$(V')^T(u) = \begin{bmatrix} 3u^3 & 2u & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ואם נכתוב את זה בתור מטריצה:

$$G = MQ \implies \underbrace{\begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix}}_{G} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} Q$$

ולכן:

$$V^T(u) = U^T(u) Q = U^T(u) M^{-1} G$$

כאשר

$$M^{-T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ואז:

$$V(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix}}_{\text{geometry matrix}}$$

$$V(u) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix}}_{\text{blending function}} \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(u) \\ H_1(u) \\ H_2(u) \\ H_3(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix}$$

תכונות

יתרונות:
- קומבינציה לינארית בין הערכים בנקודות הקצה והטנגנטים בנקודות הקצה.
- רציף ברציפות C_1.
- מגבלות ומקדמים פר מקטע ומקטע - הblending function נשאר אותו דבר.

חסרונות:
- צריך לספק טנגנטים בכל נקודה ונקודה.

Cardinal Spline

כמו הHemrite Spline, גם הCardinal Spline הוא Cubic Spline - כלומר spline ממעלה שלישית. אבל כאן לא משתמשים בטנגנטים - במקום זה משתמשים בארבע נקודות:

$$V(0) = P_k$$

$$V(1) = P_{k+1}$$

$$V'(0) = s\left(P_{k+1} - P_{k-1}\right)$$

$$V'(1) = s\left(P_{k+2} - P_k\right)$$

למעשה אנחנו מסמלצים את הHermite Spline ע"י מתן שתי נקודות נוספות.

$$\begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ T_k \\ T_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & -s & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1} \\ p_k \\ p_{k+1} \\ p_{k+2} \end{bmatrix}$$

ואם נכניס את זה לתוך המשוואות של Hermite Interpolation נקבל:

$$V(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1} \\ p_k \\ p_{k+1} \\ p_{k+2} \end{bmatrix}$$

תכונות

- רציפות C_1
- קומבינציה לינארית של 4 פונקציות
- יתרון: לא צריך טנגטנים
- חסון - יכול להיות שקירוב הטנגנטים לא יהיה מדוייק

ייצוג צבע

צבע זה בעצם תדר של אור, באורך גל בין 380nm ל750nm. כשאנחנו רואים אור אנחנו רואים שילוב של הרבה מאוד אורכי גל, ומקבלים קרינה בעוצמה לפי הספקטרום בכל אורך גל.

כאשר מדברים על תמונות, אנחנו לא באמת מייצרים את כל הספקטרום עבור כל פיקסל, אלא משתמשים בשלושה צבעים כדי לייצג את כל הצבעים הנראים. איך זה עובד?

לפי התיאוריה הטריכומטית (Trichromatic Color Theory) של תומאס יאנג, העין שלנו לא באמת רואה את כל הצבעים האפשריים. יש לנו בעין מספק מצומצם של קולטני אור (receptors). ב1850 הלמולץ ומקסוול אישו בניסויי Color Matching שיש שלושה סוגים של קולטנים כאלה, שקולטים עוצמות שונות. חיישן אחד מגיב בעיקר לאדום, חיישן שני מגיב בעיקר לירוק וחיישן שלישי מגיב בעיקר לכחול.

החיישנים בעין מורכבים משני סוגים - rods דקים וcones שהם יותר עבים. הrods הם לא חיישני צבע - הם רואים שחור לבן, רק את עוצמת האור שמגיעה. הcones הם חיישני הצבע. כדי שcone יגיב הוא צריך עצמת אור יותר גבוהה - הם הרבה פחות רגישים מrods. בגלל זה בחושך רואים שחור לבן - כי הcones לא מופעלים. במרכז יש בעיקר cones, וככל שמתרחקים לצדדים כמות הcones יורדת וכמות הrods עולה. יש שלושה סוגים של cones, שמסווגים לפי תחומי אורך הגל להם הם מגיבים:

Long(L) מגיב לאדום

Medium(M) מגיב לירוק

Short(S) מגיב לכחול

זה בעצם נותן לנו את מרחב הצבע בתור קוביה, כשכל צבע יסוד הוא מימד אחר שלה. אבל יש גם דרכים אחרות לייצג את מרחב הצבע - למשל גליל HSB:

Hue היקף הגליל - מיקום הצבע על הקשת

Satuation רדיוס הגליל - כמה הצבע טהור

Brightness גובה הגליל - הבהירות

יש גם את מרחב הצבהים המשלימים, שגם הוא קוביה:

- כחול-צהוב
- אדום-ירום
- שחור-לבן

מערכות צבעים additive מול subtructive

כאשר מקרינים צבע מוסיפים צבעים (אדום + ירוק + כחול). כאשר צובעים אנחנו שמים צבעים שבולעים אורכי גל מסויימים (לבן - אדום - ירוק - כחול). בגלל זה צבעי היסוד של צביעה הם שונים:

- צהוב - שילוב של ירוק ואדום
- צ'יאן - שילוב של כחול וירוק. דומה לכחול.
- מג'נטה - שילוב של אדום וכחול. דומה לאדום.

מרחב צבעים לינארי

מרחב RGB למשל הוא מרחב לינארי - עושים צירוף לינארי של שלושה צבעים. בשביל זה צריך שלושה מקדמים.
משתמשים במרחב צבעים XYZ:

$$X = k\int P\left(\lambda\right)\overline{x}_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

$$Y = k\int P\left(\lambda\right)\overline{y}_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

$$Z = k\int P\left(\lambda\right)\overline{z}_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

שגם הוא לינארי, ולכן אפשר לעשות המרת בסיסים:

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.365 & -0.515 & 0.005\\ -0.897 & 1.426 & -0.014\\ -0.468 & 0.089 & 1.009\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\G\\B\end{bmatrix}$$

אבל אם מתעלמים מהבהירות - כלומר רוצים $x+y+z=1$ - אפשר להגדיר:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \qquad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \qquad z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

ואז אפשר להגדיר את הצבע באמצעות (x,y) בלבד (ללא צורך בZ - אבל אין מידע על בהירות)
המרכז הוא הלבן - אבל יש כמה אפשרויות לבחור אותו (וזה חלק מההבדל בין שיטות שידור PAL וNTSC).

מרחב צבעים פרספטואלי - HSV/HSB

יש הבדל בין Brightness לValue. אם נכפיל פי 2 את העצמה של האור, לא נראה אותו בהיר פי 2 - בגלל שהתפישה שלנו היא סקאלה לוגריתמית. לכן אנחנו צריכים להגדיר את העצמה כbrightness - כמה זה נתפס בעין - ולא כvalue - כמה עצמה באמת יש. לפי חוק weber:

$$\text{Perceived Brightness} = \log\left(I\right)$$

כדי להפוך את מרחב XYZ ליותר פרספטואלי, צריך פונקציה **לא לינארית**:

$$u = \frac{4x}{-2x+12y+3} \qquad v = \frac{6y}{-2x+12y+3}$$

מרחב צבעים משלימים

יש עוד שיטת ייצוג של צבע - YIQ:

Y	עוצמת התאורה
I	איפה אנחנו על הסקאלה של אדום-ירוק
Q	איפה אנחנו על הסקאלה של כחול-צהוב

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.569 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.523 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

מסתבר שהעין הכי פחות רגישה לטשטוש בQ. משתמשים בזה בשביל דחיסה - המידע בQ הכי פחות חשוב, ולכן אם צריך לאבד מידע עדיף לאבד בQ[1].

מודל CMY

משתמשים במדפסות. לפעמים גם מוסיפים K - הצבע השחור.

[1] באופן דומה, בפורמט RGB העין הכי פחות רגישה לכחול