

אנליזה למורים - תרגיל 4

8 בדצמבר 2016

תזכורת:

- 1) סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל מתכנסת
- 2) סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת
- 3) סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

שאלה 1

תהי a_n סדרה נתונה ע"י נוסחאות נסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ כאשר $a_1, c > 0$. הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

הדרכה:

אם קיים גבול לסדרה, נסמנו ב- L , אזי מתקיים $L = \sqrt{L + c}$ (למה?), מצאו שני פתרונות למשוואה: $L_1 = ?$, $L_2 = ?$. קודם כל נפסול את אחד הפתרונות וההסבר לכך הוא שכל איברי הסדרה הם חיוביים ולכן הגבול חייב להיות אי שלילי **כאן צריך לתת הסבר למה בהכרח אחד הפתרונות לא מתאים. נסמן את הפתרון ב- L .**

נחלק למקרים:

* אם $a_1 > L$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית יורדת וכיוון שהיא חסומה מלרע ע"י אפס היא מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* אם $a_1 < L$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה כמו כן, נוכיח באינדוקציה שהיא חסומה מלעיל ע"י L , ולכן מתכנסת.

(תכתבו את פרטי ההוכחה)

* אם $a_1 = L$, קל לוודא כי הסדרה היא קבועה L

(נמקו למה)

פירוט של הוכחה באינדוקציה עבור מקרה $a_1 < L$:

נוכיח באינדוקציה שהסדרה היא מונוטונית עולה.

* בסיס אינדוקציה: עלינו להוכיח ש- $a_2 > a_1$, כלומר עלינו להוכיח את אי שוויון הבא: (?). נמצא את כל הפתרונות עבור לאי שוויון עבור המשתנה a_1 , ונגלה שהוא מתקיים במקרה שלנו כיוון ש- $0 < a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: כעת יהי n , עבורו $a_n < a_{n+1}$.

עלינו להוכיח כי $a_{n+1} < a_{n+2}$, כלומר, עלינו להוכיח כי (?), אך זה נובע בקלות לפי

הנחת האינדוקציה (לתת הסבר)

נותר לנו להוכיח כי הסדרה חסומה מלעיל ע"י L , גם את זה נוכיח באינדוקציה:

* בסיס האינדוקציה: טריביאלי, כיוון שאנו עוסקים במקרה בו $a_1 < L$.

* הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור n כלומר $a_n < L$.

נרצה להוכיח את אי שוויון הבא: $a_{n+1} < L$. אי שוויון זה נכון אם ורק אם :

$$a_n < \frac{(\sqrt{4c+1}+1)^2}{4} - c = a_n + c < \frac{(\sqrt{4c+1})^2}{4}$$

סה"כ לכל ערכי $c > 0$ ולכל ערכי $a_1 > 0$ מתקיים כי (?). $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

שאלה 2

תהי הסדרה a_n הנתונה ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ כאשר $a_1 > 0$, הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

הדרכה:

דבר ראשון, נראה כי הסדרה היא מונוטונית עולה (?). $a_{n+1} - a_n =$

כעת נניח שהסדרה חסומה אזי מתכנסת לגבול ממשי L . כיוון ש: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L, \text{ נקבל את המשוואה הבאה } L + \frac{1}{L} = L \text{ (איזו סתירה מתקבלת כאן)}$$

שאלה 3

בדקו את התכנסות הסדרה: $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$.

שאלה דומה מאוד עשינו בכיתה

שאלה 4

היה $0 < c < 1$. נגדיר סדרה ע"י תנאי ההתחלה $a_1 = c$ ונוסחת הנסיגה

$$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}.$$
 הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

הזרחה:

ראשית רואים שהסדרה חסומה מלמעלה ע"י (?). כעת נוכיח באינדוקציה כי הסדרה

$$a_n - a_{n-1} \leq 0$$

* בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ מתקיים (?) $a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_1$

* החנחת האינדוקציה נניח נכונות עבור n

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n + 1$: $a_{n+1} - a_n = (?)$

הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלמעלה ולכן היא מתכנסת. לכן קיים $L \in \mathbb{R}$

כך ש- $a_n \rightarrow L$, אזי

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = (?)$$

קיבלנו משוואה ריבועית: (?) ולכן $L_{1,2} = (?)$. אחד פתרונות נפסל (**איזה מהם?**) משום

שכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- $a_n \leq 1$, ולכן הגבול חייב להיות (?)