פתרון מבחן בפונקציות מרוכבות (שחר תשע"ו מועד ב)

1. (א) כמובן נציב $w=z^3$ ואז המשוואה היא בעצם

$$w^2-5w+6=0$$

הפתרון של זה הוא

$$w=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

כלומר הפתרונות הם $2,3$. עכשיו צריך למצוא את z כאשר ידוע ש $z^3=2$ או $z^3=3$ ואז כמובן לפי הצגה פולארית הפתרונות הם:

$$z=\sqrt[3]{2},\quad \sqrt[3]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}},\quad \sqrt[3]{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$
$$\sqrt[3]{3},\quad \sqrt[3]{3}e^{\frac{2i\pi}{3}},\quad \sqrt[3]{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

(ב) היה בתרגילי בית - תרגיל 11 שאלה 3.

2. (א) משפט מההרצאה

(ב) כמובן שצריך להשתמש במשפט רושה.

i. נגדיר $f(z)=z^4+5z^3-2z^2+1$ ו $g(z)=-10z$. על מעגל היחידה $|z|=1$ מתקיים ש

$$|f(z)|\le 1+5+2+1=9<10=|g(z)|$$

ולכן לפי משפט רושה לפונקציה שלנו יש אפס אחד בתוך עיגול היחידה (כמו ל $g(z)$).

ii. נגדיר $f(z)=z^4-2z^2-10z+1$ ו $g(z)=5z^3$ ואז על המעגל $|z|=3$ מתקיים

$$|f(z)|\le 3^4+2\cdot3^2+10\cdot3+1=130<135=5\cdot3^3=|g(z)|$$

ואז לפי משפט רושה יש בדיוק 3 פתרונות לפונקציה בתוך העיגול $|z|<3$. אחד מהם נמצא בתוך $|z|<1$ כמו שראינו בסעיף הקודם. על מעגל היחידה $|z|=1$ אין פתרון (זה גם נובע מהסעיף הקודם - איפה ש $|f|<|g|$ לא ייתכן של $f+g$ יש שורש). ולכן בטבעת $1<|z|<3$ יש שני שורשים.

iii. היות וזה פולינום ממעלה 4 יש לו 4 שורשים בכל המישור המרוכב. כבר ראינו ששלושה מהם נופלים בתוך $|z|<3$ וגם לפי הסעיף הקודם אין שורש על המעגל $|z|=3$ ולכן בתחום $|z|>3$ יש שורש אחד בלבד.

3. משפט מההרצאה

4. (א) כזכור, ההעתקה $\frac{1}{z}$ היא העתקת מביוס ולכן שולחת מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים. נביט על המעגל $|z+i|=1$. הוא עובר ב 0 וב $-2i$ והיות ו $\frac{1}{0}=\infty$ ו $\frac{1}{-2i}=2i$ נקבל שהוא נשלח לישר העובר דרך $2i$. בנוסף נשים לב

ש $\frac{1}{z}$ שולח את הציר הממשי לציר הממשי ואת הציר המדומה לציר המדומה. המעגל שלנו משיק לציר הממשי וניצב לציר המדומה ולכן נקבל שהתמונה שלו מקבילה לתמונת הציר הממשי (= הציר הממשי) וניצבת לתמונת הציר המדומה (=הציר המדומה) ולכן בהכרח תמונת המעגל היא הישר $\{z \mid \operatorname{Im} z = 2\}$.(היה אפשר להגיע לאותה תוצאה גם על ידי הצבה של נקודה נוספת מהמעגל, אבל זה היה שיקול יותר זריז). משיקול דומה תמונת המעגל $|z+2i| = 2$ היא $\{z \mid \operatorname{Im} z = 4\}$. עכשיו צריך להבין לאן בדיוק נשלח החלק המקווקו. היות ו $\frac{1}{-3i} = 3i$ נקבל שהוא נשלח לרצועה בין שני הישרים האלה ולסיכום תמונת הקטע המקווקו היא:

$$\{z \mid 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4\}$$

(ב) היה בתרגילי בית - תרגיל 9 שאלה 5.

5. נבצע הצבה סטנדרטית $z = e^{i\theta}$ ונקבל

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{(2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2})^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{4}{(z+4+\frac{1}{z})^2}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$
$$= -4i \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\mathrm{d}z$$

את האינטגרל הזה נחשב לפי משפט השאריות. נשים לב ש

$$(z^2+4z+1) = (z-(-2+\sqrt{3}))(z-(-2-\sqrt{3}))$$

עכשיו, $-2-\sqrt{3}$ מחוץ לתחום שלנו (מעגל היחידה), אבל $-2+\sqrt{3}$ בפנים. אז צריך לחשב את השארית, זה כמובן קוטב מסדר 2 אז צריך לחשב נגזרת של

$$\frac{z}{((z-(-2-\sqrt{3})))^2}$$

אם נגזור נקבל

$$\frac{((z-(-2-\sqrt{3})))^2 - 2(((z-(-2-\sqrt{3}))z}{((z-(-2-\sqrt{3})))^4}$$

נציב $z = -2+\sqrt{3}$ ונקבל

$$\frac{12-4\sqrt{3}(-2+\sqrt{3})}{144} = \frac{8\sqrt{3}}{144} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

ולכן בסך הכל, לפי משפט השאריות (ואם נחשיב את הקבועים שהמקדמים של האינטגרל) האינטגרל הוא:

$$-4i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$$

6. (א) ברור שהכל דיפרנציאבילי. נבדוק קיום משוואות קושי רימן,

$$u(x,y) = x^3 + 3xy \quad v(x,y) = y^2 + xy$$

$$u_x = 3x^2 + 3y = 2y + x = v_y$$

$$u_y = 3x = -y = -v_x$$

אז נקבל ש $y = -3x$ ולכן מהמשוואה הראשונה נקבל

$$3x^2 - 4x = 0$$

כלומר $x = 0$ או $x = \frac{4}{3}$ לסיכום הפונקציה גזירה אך ורק בנקודות

$$z = 0 \quad z = \frac{4}{3} - 4i$$

לכן הפונקציה אינה אנליטית בשום מקום (אין אף נקודה עם סביבה גזירה).
הנגזרת שווה ל

$$f'(z) = u_x + iu_y$$

בנקודה $z = 0$ מתקיים ש

$$u_x = 0 = u_y$$

ולכן הנגזרת

$$f'(0) = 0$$

בנקודה $z = \frac{4}{3} - 4i$ מתקיים ש

$$u_x = \frac{-20}{3}, \quad u_y = 4$$

ולכן

$$f'(\frac{4}{3} - 4i) = -\frac{20}{3} + 4i$$

(ב) נניח כי $z_0 = 0$ היא קוטב מסדר כלשהוא. אז

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$$

אבל זה בסתירה לכך ש

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

אז הסינגולריות אינה קוטב. נניח בשלילה שהיא סליקה. אז ע"י החלפת נקודה אפשר להפוך את f לאנליטית בסביבת $z_0 = 0$. אז לפי עקרון היחידות נקבל ש $f(z) = z^3$ (הן מסכימות על קבוצה בעלת נקודת הצטברות). אבל זה בסתירה לכך ש

$$f(1) = f(-1)$$

לפי הנתון. ולכן $z_0 = 0$ בהכרח סינגולריות עיקרית.