

משוואות דיפרנציאליות רגילות – מבחן לדוגמה

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה ומצא את הפתרון הכללי :

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x(x+y)}{y(t+y)}$$

תשובה : $y = C_1, \quad \frac{x(t+y)}{x+y} = C_2$

2. פתור את מערכת המשוואות הבאה ומצא את הפתרון הכללי :

$$\frac{dy}{dt} - x + y = e^t, \quad \frac{dx}{dt} + x - y = e^t$$

תשובה : $y = -C_2 e^{-2t} + e^t + C_1, \quad x = C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t$

3. מצא 4 איברים ראשוניים בפתרון המשוואה

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$

תשובה : $y_1(x) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 - \frac{5145}{75816}x^3 + \dots \right)$

$y_2 = a_0 x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3 + \dots \right)$

4. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי

$$xy' + y = x^3 y^6$$

תשובה : $y = \left(\frac{5x^3}{2} + C_1 x^5 \right)^{\frac{1}{5}}$

5. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי

$$(x + 3x^3 \sin y)dx + x^4 \cos y dy = 0$$

תשובה : $x + x^3 \sin y = C$

6. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי

$$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + \frac{1}{x - y + 2}$$

תשובה : $(x - y + 2)^2 = 1 + C e^{2x}$

7. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי

$$(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy = 0$$

תשובה : $y = x \tan(\ln|x| + C)$

8. מצא 5 איברים ראשוניים בפתרון המשוואה :

$$y(0) = 1, y'(0) = 1, y'' = yy' - x^2$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \dots : \underline{\text{תשובה}}$$

9. מצא 5 איברים ראשוניים של טור טיילור בפתרון המשוואה :

$$y(1) = 0, y'(1) = 1, x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

$$y(x) = \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} + \dots : \underline{\text{תשובה}}$$

10. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי :

$$x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = 6 \ln x$$

$$y = \frac{C_1 + C_2 \ln x + \ln^3 x}{x} : \underline{\text{תשובה}}$$

11. פתור את המשוואה הבאה ומצא את הפתרון הכללי :

$$y'' + y = \cos^2 x$$

$$y = \left(\frac{\cos^3 x}{3} + C_1 \right) \cos x + \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2 \right) \sin x : \underline{\text{תשובה}}$$