תרגיל 9

7 ביוני 2015

1. עבור המטריצה הבאה: $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$ מצא B משולשית ו P הפיכה, כך ש:

$$P^{-1}AP = B$$

פתרון: הו"ע הם: $(1,-1,1)$, $(1,2/3,1)$. נשלים לבסיס ע"י, למשל: $(0,0,1)$. נשים את הוקטורים בעמודות של מטריצה ונקבל: $P = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$. $P^{-1}AP$ יצא מטריצה משולשית.

2. הוכח, בעזרת משפט השילוש, שלכל מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים, ה $trace$ שלה שווה לסכום הערכיים העצמיים שלה (כל אחד נספר לפי הריבוי האלגברי שלו), והדטרמיננטה שלה שווה למכפלת הערכים העצמיים (כל אחד נספר לפי הריבוי האלגברי שלו)

פתרון: ראשית, נשים לב שעבור מטריצות משולשיות הטענה טריוויאליתת משום שהע"ע שלן הן בדיוק האיברים על האלכסון (הר"א של כל ע"ע הוא מס' הפעמים שהוא מופיע באלכסון). ואילו ה trace שווה לסכום איברי האלכסון והדטרמיננטה של מטריצה משולשית היא מכפלת איברי האלכסון. לכן השוויון ברור.

כעת, אם A מטריצה שהפולינום האופייני שלה מל"ל, אזי היא דומה למטריצה משולשית. למטריצות דומות יש אותו $trace$, אותה דטרמיננטה, ואותם ע"ע. לכן מספיק לבדוק שהטענה נכונה על המטריצה המשולשית שדומה לה, שאת זה כבר הראינו. מש"ל.

3. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

1. $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

פתרון : לא! למשל

$$< 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 1^2 = 25$$

אבל

$$3 < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= 3 \cdot \left(2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1^2\right) = 3 \cdot 9 = 27$$

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

פתרון : כן! נבדוק את הקריטריונים

.i

$$\begin{aligned} & < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} >= 2(x_1 + x_2)x_3 + 7(y_1 + y_2)y_3 \\ = \;& 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 7y_1y_3 + 7y_2y_3 = (2x_1x_3 + 7y_1y_3) + (2x_2x_3 + 7y_2y_3) \\ = \;& < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} > + < \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & < \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2\alpha x_1x_2 + 7\alpha y_1y_2 \\ = \;& \alpha 2x_1x_2 + \alpha 7y_1 = \alpha\left(2x_1x_2 + 7y_1\right) = \alpha < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

.ii

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2x_1x_2 + 7y_1y_2 = 2x_2x_1 + 7y_2y_1 =< \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} >$$

.iii

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} >= 2x_1^2 + 7y_1^2 \geq 0$$

וקיים שיוויון לאפס אמ"מ $x_1 = y_1 = 0$ אמ"מ זהו וקטור האפס

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : < \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

פתרון : לא! למשל

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= 0$$

למרות ש $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ איננו וקטור האפס.

4. יהא V ממ"פ. יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס.

1. יהא $v \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v >= 0$. הוכח $v = 0$

פתרון : כיוון ש B פורשת אזי

$$\exists v_1, \dots v_n \in S,\ \alpha_1, \dots \alpha_n : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

לפי נתון מתקיים לכל i כי

$$< v_i, v >= 0$$

ולכן

$$< v, v >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < v_i, v >= 0$$

ולכן $v = 0$

(א) יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v >=< v_i, u >$. הסק כי $v = u$

פתרון : נעביר אגף ונקבל כי לכל i מתקיים כי

$$0 =< v_i, v > - < v_i, u >=< v_i, v - u >$$

לפי סעיף קודם $v - u = 0$ ולכן $v = u$

5.יהא V ממ"פ. תהא $T : V \to V$ ה"ל. הוכח או הפרך:

1. אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $< Tv, v >= 0$ אזי $T = 0$

פתרון : הפרכה למשל $\mathbb{R}^2$עם המכפלה הסקלארית ו T המוגדרת להיות

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

אזי אכן מתקיים כי

$$< T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >== yx - xy = 0$$

אבל $T \neq 0$

(א) תהא S קבוצה פורשת של V. אם לכל $u, v \in S$ מתקיים כי $< Tv, u >= 0$ אז $T = 0$

פתרון : הוכחה. יהא $v \in V$ צ"ל $Tv = 0$. כיוון ש S פורשת אזי

$$\exists v_1, \dots v_n \in S,\ \alpha_1, \dots \alpha_n : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

$$\exists u_1, \dots u_n \in S,\ \beta_1, \dots \beta_n : Tv = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$$

לפי נתון מתקיים לכל i, jכי

$$< Tv_i, u_j >= 0$$

כעת נחשב

$$< Tv, Tv >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tv_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta_j} < Tv_i, u_j >= 0$$

ולכן מתכונות מ"פ $Tv = 0$

2. יהא V ממ"פ מעל השדה $\mathbb{F}$ עם נורמה מושרית $||\cdot||$ הוכח את הבאים לכל $u,v \in V$:

(א) אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אזי $<u,v>= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$

פתרון : נחשב לפי הגדרה

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right) &= \frac{1}{4}\left(<u+v,u+v> - <u-v,u-v>\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(<u,u> +2<u,v> + <v,v> - (<u,u> -2<u,v> + <v,v>)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2<u,v> +2<u,v>\right) = <u,v>
\end{aligned}$$

(ב) אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אזי $<u,v>= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i||u+iv||^2 - i||u-iv||^2\right)$

פתרון : נחשב לפי הגדרה

$$\begin{aligned}
<u+v,u+v> &= <u,u> + <u,v> + \overline{<u,v>} + <v,v> \\
<u-v,u-v> &= <u,u> - <u,v> - \overline{<u,v>} + <v,v> \\
i<u+iv,u+iv> &= i\left[<u,u> -i<u,v> +i\cdot\overline{<u,v>} + <v,v>\right] \\
i<u-iv,u-iv> &= -i\left[<u,u> +i<u,v> -i\cdot\overline{<u,v>} + <v,v>\right]
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
<u+v,u+v> - <u-v,u-v> &= 2<u,v> +2\overline{<u,v>} \\
i<u+iv,u+iv> -i<u-iv,u-iv> &= 2<u,v> -2\overline{<u,v>}
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i||u+iv||^2 - i||u-iv||^2\right) &= \frac{1}{4}\left(<u+v,u+v> - <u-v,u-v> +i<u+iv,\right. \\
&= \frac{1}{4}\left(2<u,v> +2\overline{<u,v>} + 2<u,v> -2\overline{<u,v>}\right) =
\end{aligned}$$

גד

בהצלחה!