תרגיל כיתה 5 - אנליזה מודרנית

1. (generalized DCT) נניח כי f_n, g_n, f ו g הינן איטגרביליות, $f_n \to f$ כב"מ, $g_n \to g$ כב"מ, $|f_n| \le g_n$ לכל n וגם $\int g_n \to \int g$. הוכיחו כי $\int f_n \to \int f$.

פתרון: נגדיר סדרה חדשה של פונקציות חיוביות - $h_n = g_n - f_n$. עפ"י למת פאטו נקבל

$$\begin{aligned}&\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int g_n - f_n = \underline{\lim}\int g_n + \underline{\lim}\int -f_n\\&= \lim\int g_n + \underline{\lim}\int -f_n \ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(g_n - f_n) = \int g - f\\&\Leftrightarrow \overline{\lim}\int f_n \le \int f\end{aligned}$$

מצד שני , נגדיר $h_n = g_n + f_n$ עפי למת פאטו נובע כי

$$\begin{aligned}&\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int f_n + g_n = \underline{\lim}\int f_n + \int g\\&\ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(f_n + g_n) = \int f + \int g .\\&\Leftrightarrow \underline{\lim}\int f_n \ge \int f\end{aligned}$$

מכאן שבסך הכל $\overline{\lim}\int f_n \ge \int f \ge \underline{\lim}\int f_n$ ולכן $\int f_n \to \int f$.

התכנסות חסומה

תזכורת : יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, $\mu(X) < \infty$ וגם $|f_n| < M$. אזי f_n, f אינטגרביליות וגם מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$.

2. יהי (X,S,μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A) < \infty$ ומתקיים

$$\varepsilon + \int_A f > \int f .$$

פתרון: מכיוון ש (X,S,μ) הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n \in S$ כך ש $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup_n A_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי A_n זרות. נסמן $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ איחוד

סופי של קבוצות ונסמן $f_n = f1_{E_n}$, הצימצום של f על E_n . מכיוון ש $X = \bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n \to f$, מכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\int f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int f1_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. מכיוון ש $f \geq f_n$ נובע כי $\int f \leq \int_{E_n} f$ ומכאן ש $\int f \uparrow \int_{E_n} f$. קל לראות כי $\mu(E_k) < \infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f > \int_{E_k} f + \varepsilon$ עבור k מספיק גדול.

3. יהיו $f, f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ כב"מ ו $f \geq f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

פתרון:

נחלק לשני מקרים:

(1) $\int f = \infty$: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int \underline{\lim} f_n = \int f \leq \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int f = \infty$

(2) $\int f < \infty$: אזי הסדרה f_n נשלטת ע"י פונקציה אינטגרבילית f ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

4. יהיו $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \to f$ כב"מ. הוכיחו כי $\int |f - f_n| \to 0 \Leftrightarrow \int |f_n| \to \int |f|$.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim \int |f - f_n| = 0$.

אזי

$$\int_X |f_n - f| du \geq \int_X \big||f_n| - |f|\big| du \geq \left| \int_X |f_n| - |f| du \right| = \left| \int_X |f_n| du - \int_X |f| du \right|$$

ומכאן ש

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| du \geq \lim_{n\to\infty} \left| \int_X |f_n| du - \int_X |f| du \right| = 0$$

$\Rightarrow$: נניח כי $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| du = \int_X |f| du$.

נשים לב כי $\left|f-f_n\right| \geq \left|f\right|+\left|f_n\right| = g_n$. ברור כי g_n אינטגרבילית וכי $g_n \to g=2f$ כב"מ וכי $\int g_n \to \int g$ מכך ש $\int\left|f_n\right| \to \int\left|f\right|$. כעת ברור כי מתקיימים כל התנאים למשפט הכללי של ההתכנסות הנשלטת ולכן נובע כי
$\lim\int\left|f-f_n\right| = \int\lim\left|f-f_n\right| = 0$. מש"ל.

5. יהי (Ω,S,μ) מרחב מידה. נניח כי $X\subset\Omega$ כך ש $\mu(X)=1$ וכך ש $A,B,C\subseteq X$ כך ש $\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)\geq 2.5$. האם ייתכן כי $A\cap B\cap C=\varnothing$?

פתרון: נניח בשלילה כי $A\cap B\cap C=\varnothing$ ונגדיר את הפונקציות $f=1_A, g=1_B, h=1_C$. מצד אחד $h+f+g\leq 2$ בגלל ש $A\cap B\cap C=\varnothing$ ולכן $\int f+g+hd\mu\leq 2$. מצד שני $\int f+g+hd\mu=\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)\geq 2.5$ ולכן סתירה.

<u>תזכורת</u>: (משפט פוביני-טונלי): יהיו (X,S,μ) ו (Y,G,ν) יהיו σ - סופיות, ותהי f פונקציה מ $X\times Y$ ל $[0,\infty]$ מדידה $S\times G$ או $f\in L^1(X\times Y, S\times G, \mu\times\nu)$. אזי

$$\int f d\mu\times d\nu = \iint f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) = \iint f(x,y)d\nu(y)d\mu(x).$$

כלומר, ניתן להחליף סדר אינטגרציה.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $f:(\mathbb{R},L(\mathbb{R}))\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dm(x) = \int_0^{\infty} m\left(\left\{x:\left|f(x)\right|\geq t\right\}\right)dm(t).$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{|f(x)|} 1dm(t)\right]dm(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(t)\right]dm(x) \overset{Tonelli}{=} \int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(x)\right]dm(t) = \int_0^{\infty} m\left(\left\{x:\left|f(x)\right|\geq t\right\}\right)dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x),dm(t)$ שהן שלמות ו-σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי ה**קבוצה** $\left\{(x,t):\left|f(x)\right|\geq t\right\}$ מדידה "$L\otimes L$" .

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את σ-אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, ההעתקה $x \mapsto \left|f(x)\right|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} : \left|f(x)\right| > \alpha\} =: E_\alpha \in L$. ומכאן $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \left|f(x)\right| > \alpha\} = E_\alpha \times \mathbb{R} \in L \otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t) \mapsto \left|f(x)\right|$ מדידה $L \otimes L$.

הפונקציה $t \mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\{t \in \mathbb{R} : t > \alpha\} =: F_\alpha \in L$, ומכאן $\{(x,t) : t > \alpha\} = \mathbb{R} \times F_\alpha \in L \otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t) \mapsto \left|f(x)\right| - t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $\left(\left|f\right| - t\right)^{-1}\left[[0,\infty)\right]$ ולכן מדידה.

2. <u>תרגיל:</u> תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x) = \mu((-\infty, x])$. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha(x+c) - \alpha(x)\right] dm(x) = c\mu(\mathbb{R})$.

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha(x+c) - \alpha(x)\right] dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mu((-\infty, x+c]) - \mu((-\infty, x])\right] dm(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu((x, x+c]) dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(x,x+c]} d\mu(t) dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): x < t \le x+c\}} d\mu(t) dm(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \ge t-c\}} d\mu(t) dm(x) \overset{Tonelli}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \ge t-c\}} dm(x) d\mu(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t) = c\mu(\mathbb{R})$$