# תורת הגרפים - הרצאה 12

22 בינואר 2012

## השלמה לשיעור הקודם

ספקטרום (אוסף ע"ע) של מטריצת שכנות של:

1. $G = K_n$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע עם ע"ע $n-1$.

$\begin{pmatrix} -(n-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע עם ע"ע $-1$.

כל וקטור שכל איבריו 1 מלבד איבר אחד כלשהו שהוא $-(n-1)$ הוא ו"ע עם ע"ע $-1$.

אם נסמן $u_i$ = הוקטור שכל איבריו 1 מלבד במקום ה-$i$ בו הוא $-(n-1)$ נקבל ש= $\dim \operatorname{span}\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ $n-1$.

לכן, ע"ע של $A_{K_n}$ הם $n-1$ בריבוי 1 ו$-1$ בריבוי $n-1$.

$$spec\left(A_{K_n}\right) = \{\{n-1, -1, -1, ..., -1\}\}$$

2. קוביה $n$ מימדית:

$$G = K_2 \times K_2 \times ... \times K_2 = K_2^{\times n}$$

עובדה מאלגברה:

$$\operatorname{spec}\left(A_{G\times H}\right) = \operatorname{spec}\left(A_G\right) + \operatorname{spec}\left(A_H\right)$$

למשל, עבור ריבוע $G = C_4 = K_2 \times K_2$ נקבל:

$$\begin{aligned} \operatorname{spec}\left(A_{C_4}\right) &= \operatorname{spec}\left(A_{K_2}\right) + \operatorname{spec}\left(A_{K_2}\right) \\ &= \{\{-1, 1\}\} + \{\{-1, 1\}\} \\ &= \{\{-2, 0, 0, 2\}\} \end{aligned}$$

## תרגיל

מה הע"ע של $A_{K_2}^{\times n}$?

### פתרון

הם $n-2k$ בריבוי $\binom{n}{k}$ כאשר $0 \le k \le n$.

## הגדרה

יהי $G$ גרף לא מכוון שקב' קדקדיו $\{v_1, ..., v_n\}$.
$A_G$ מטריצת שכנות של $G$, כלומר $(A_G)_{ij}$ = מס' הצלעות מ$v_i$ ל$v_j$.
נגדיר מטריצת הדרגות של $G$:

$$D_G = \begin{pmatrix} d_G(v_1) & & & 0 \\ & d_G(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_G(v_n) \end{pmatrix}$$

כלומר זו מטריצה אלכסונית שבאלכסוניה הדרגות.
נגדיר את הלפלסיאן של $G$:

$$L_G = D_G - A_G$$

## דוגמאות

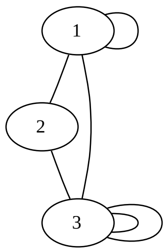
1. $G = K_3$.

$$D_G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. נוסיף לולאות:

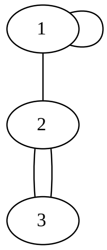
$G =$ 


$$\begin{aligned} D_G &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A_G &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ L_G &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## הערה

הלפלסיאן מתעלם מלולאות (לא סופר אותן).
כלומר השמטת \ הוספת לולאות לא משנה את הלפלסיאן.

### דוגמה נוספת

$G =$ 

אזי

$$L_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

## טענה 1

לכל גרף $G$ מסדר $> 1$, $L_G$ מטריצה סינגולרית.

### הוכחה

סכום כל שורה שווה ל-0 ולכן הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע עם ע"ע 0 לכן היא סינגולרית.

## משפט

לכל גרף $G$ מסדר $n$ מתקיים:

$$\text{rank}\left(L_G\right) = n - k\left(G\right)$$

כאשר $k\left(G\right)$ מס' רכיבי הקשירות.

### הוכחה

כידוע מאלגברה לינארית, לכל מטריצה $A$ מסדר $n \times n$ מתקיים:

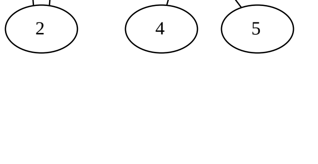
$$n - \text{rank}\left(A\right) = \dim\ker A$$

וזה מימד המרחב העצמי המתאים לע"ע 0.
יהיו $V^1, ..., V^k$ רכיבי קשירות של הגרף $G$.
נגדיר וקטורים $u^i$ עבור $1 \leq i \leq k$ כך:

$$u_j^i = \begin{cases} 1 & v_j \in V^i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

### טענת עזר 1

לכל $1 \leq i \leq k$, $u^i$ הוא ו"ע עם ע"ע 0.
דוגמה:

$G =$ 

אזי:

$$L_G=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&0&0&0&0\\2&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&0&0&0&0\\-2&2&0&0&0&0\\0&0&2&-1&-1&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

והוקטורים:

$$u^1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$u^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$u^3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ואלה וקטורים עצמיים עם ע"ע 0, כי המטריצה היא מטריצת בלוקים וכל $u^i$ מתייחס לבלוק אחר.
ברור שאם $\sum a_i u^i=0$ אז לכל $i$ מתקיים $a_i=0$ לכן קב' הוקטורים $u^1,\ ...,\ u^k$ בת"ל וכולם ו"ע עם ע"ע 0 לכן:

$$\dim\ker L_G\ge k$$

נותר להראות $k\ge\dim\ker L_G$.
מספיק להראות שכל ו"ע עם ע"ע 0 נפרש ע"י $u^1,\ ...,\ u^k$.
כלומר שכל וקטור עצמי עם ע"ע 0 מקבל ערך קבוע על כל רכיב קשירות.
יהי $u$ ו"ע עם ע"ע 0 של $L_G$.
נראה ש$u$ קבוע על $V^1$ (בדומה מראים לכל שאר רכיבי הקשירות).
נניח בה"כ $V^1=\{v_1,\ ..,\ v_r\}$.
צ"ל $u_1=u_2=...=u_r$.
יהי $M=\max\{u_1,\ ...,\ u_r\}$.
נניח בה"כ $u_1=M$.
$u$ ו"ע עם ע"ע 0 לכן:

$$\begin{aligned}L_G\cdot u&=\bar{0}\\(L_Gu)_1&=0\\d_G(v_1)u_1-\sum_{i=2}^{n}a_{1i}u_i&=0\end{aligned}$$

תזכורת: הנחנו $v_1,\ ...,\ v_r$ רכיב קשירות לכן $a_{1i}=0$ עבור $j>r$. לכן:

$$\begin{aligned}d_G(v_1)u_1-\sum_{i=2}^{r}a_{1i}u_i&=0\\d_G(v_1)u_1&=\sum_{v_j\in N_G(v_1)}a_{1j}u_j\end{aligned}$$

אם $d_G(v_1) = 0$ סיימנו (כי אז יש רק קדקד אחד ברכיב הקשירות וברור ש$u$ קבוע עליו).
נניח $d_G(v_1) \neq 0$. נחלק ב$d_G(v_1)$:

$$u_1 = \sum_{v_j \in N_G(v_1)} \frac{a_{1j}}{d_G(v_1)} \cdot u_j$$

לפי ההגדרה:

$$d_G(v_1) = \sum_{v_j \in N_G(v_1)} a_{1j}$$

לכן אגף ימין הוא הממוצע של ערך $u$ על שכני $v_1$, ואך כיוון ש$u_1$ הוא המקסימום של ערך $u$ קיבלנו שהממוצע שווה למקסימום ולכן כולם שווים למקסימום, כלומר כל שכני $v_1$ מקבלים ערך מקסימלי של $u$.
וחוזר חלילה, שכני השכנים גם כן מקבלים ערך מקסימלי מאותו שיקול, עד שנכסה את כל קדקדי הרכיב הראשון $V^1$.

# תזכורת מאלגברה לינארית

מינור ראשי של מטריצה הוא המטריצה המתקבלת מהשמטת שורה $i$ ועמודה $i$.

# משפט מטריצה-עץ (Matrix-Tree Theorem, משפט קיילי)

מס' העצים הפורשים גרף $G$ מסדר $> 1$ שווה לדטרמיננטה של מינור ראשי $L_G$.

## דוגמה

$G = K_3$.
יש שלושה עצים פורשים ל$K_3$.

$$L_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

לפי משפט מטריצה-עץ, מס' העצים הפורשים את $K_3$ הוא:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

## הוכחה

נניח, בה"כ, משמיטים שורה ועמודה אחרונה (מדוע ניתן להניח זאת?).
נוכיח באינד' על מס' הצלעות $m$.
אם $m = 0$ (סדר הגרף, לפי ההנחה $n > 1$).
הגרף אינו קשיר לכן אין לו עצים פורשים.
לכן מס' העצים הפורשים 0.
מאידך, הלפלסיאן של גרף ריק היא מטריצת 0 מגודל $n \times n$, לכן דטרמיננטה של מינור ראשי היא 0.
נניח נכונות המשפט עבור כל גרף עם פחות מ-$m$ צלעות.
יהי $G$ גרף עם $m$ צלעות ותהא $e$ צלע ב$G$, בה"כ $e = (v_{n-1}, v_n)$.
נסמן $n_G$ מס' העצים הפורשים את $G$.

## טענת עזר 1

$$n_G = n_{G \setminus e} + a_{n-1,n} \cdot n_{G/e}$$

## הוכחת טענת עזר 1

נחלק את העצים הפורשים את $G$ לשני סוגים:
סוג א' לא מכיל את $e$, סוג ב' מכיל את $e$.
נשים לב שכל עץ פורש של $G$ מסוג א' מתאים חח"ע לעץ פורש של $G \setminus e$, לכן מס' העצים הפורשים מסוג א' שווה ל$n_{G \setminus e}$.

כל עץ פורש של $G/e$ נהפך לעץ פורש של $G$ אם מוסיפים לו את אחת הצלעות בין $v_{n-1}$ ל$v_n$.
לכן, מס' העצים הפורשים של $G$ מסוג ב' שווה ל$a_{n-1,\,n} \cdot n_{G/e}$.
מש"ל טענת עזר.

## הערה

$G\backslash e$ = הגרף המתקבל מ-$G$ ע"י השמטת כל העותקים של $e$.
$G/e$ הגרף המתקבל מ$G$ ע"י, אם $e=(v,\,u)$ והקדקד החדש $e$, אז אז הריבוי של $(e,\,x)$ שווה לריבוי של $(x,\,u)$ + ריבוי של $(x,\,v)$.

## טענת עזר 2

נסמן $\Delta_G$ דטרמיננטה של מינור ראשי של $L_G$ אזי:

$$\Delta_G = \Delta_{G\backslash e} + a_{n-1,\,n}\Delta_{G/e}$$

## הוכחת טענת עזר 2

אם:

$$L_G = \left[\begin{array}{c|c|c} M & & \\ \hline & d_G\left(v_{n-1}\right) & -a_{n-1,\,n} \\ \hline & -a_{n-1,\,n} & d_G\left(v_n\right) \end{array}\right]$$

אזי:

$$L_{G\backslash e} = \left[\begin{array}{c|c|c} M & & \\ \hline & d_G\left(v_{n-1}\right) - a_{n-1,\,n} & 0 \\ \hline & 0 & d_G\left(v_n\right) \end{array}\right]$$

נפתח $\Delta_G$ ו-$\Delta_{G\backslash e}$ לפי שורה $n-1$ (שורה אחרונה במינור ראשי).
נקבל:

$$\Delta_G - \Delta_{G\backslash e} = a_{n-1,\,n}\det M$$

נותר להראות:

$$\Delta_{G/e} = \det M$$

אך:

$$L_{G/e} = \left[\begin{array}{c|c} M & \\ \hline & \end{array}\right]$$

כאשר השורה והעמודה האחרונה מתייחסות לקדקד החדש $e$, לכן מינור ראשי הוא בדיוק $M$ לכן:

$$\Delta_{G/e} = \det M$$

וסיימנו טענת עזר 2.

## מסקנה

משפט קיילי.
הדרכה:
$L_{K_n} = (k-1)\,I_k - A_{K_n}$.
מס' העצים המסומנים מסדר $n$ הוא מס' העצים שפורשים את $K_n$.