"אלגברה ליניארית 2"

עבודת הגשה לחנוכה:

סכומים ישרים של כל דבר

שם מגיש: אלדבח לידור

ת.ז: 311324362

שם מתרגל: דורון פרלמן

שם מרצה: ד"ר בועז צבאן

1. יהיו $A_1,...,A_n$ מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. (נסמן את סדרן $l_1,...,l_n$ בהתאמה)

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה:

עבור 1: $|A_1|=|A_1|$ מתקיים.

עבור 2: תהי $B=A_1\oplus A_2$ נראה כי $|B|=|A_1|\cdot|A_2|$ (נשתמש בהגדרת הסכום הישר של מטריצות)

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_{l_1+l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}=$$

עתה כיוון ש $B=A_1\oplus A_2=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$ אזי

$\forall i\in\mathbb{N},1\le i\le l_1:l_1+1\le\sigma(i)\le n\Rightarrow[B]_{i\sigma(i)}=0$ וכן

$\forall i\in\mathbb{N},l_1+1\le i\le n:1\le\sigma(i)\le l_1\Rightarrow[B]_{i\sigma(i)}=0$. לכן ההעתקות שעבורן

$\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}$ לא מתאפס הן אילו המקיימות

$\forall i\in\mathbb{N},1\le i\le l_1:1\le\sigma(i)\le l_1.\forall i\in\mathbb{N},l_1+1\le i\le n:l_1+1\le\sigma(i)\le n$.

עתה נשים לב כי $\forall i\in\mathbb{N},1\le i\le l_1,1\le\sigma(i)\le l_1:[B]_{i\sigma(i)}=[A_1]_{i\sigma(i)}$ וכן

$\forall i\in\mathbb{N},l_1+1\le i\le n,l_1+1\le\sigma(i)\le n:[B]_{i\sigma(i)}=[A_2]_{i\sigma(i)}$, בסה"כ:

$$\sum_{\sigma\in S_{l_1+l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_{l_1},\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)}\cdot[A_2]_{1\tau(1)}\cdots[A_2]_{l_2\tau(l_2)}$$

נשתמש ב $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$:

$$\sum_{\sigma\in S_{l_1},\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)}\cdot\ldots\cdot[A_2]_{1\sigma(1)}\cdots[A_2]_{l_2\sigma(l_2)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_{l_1},\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)}\cdot[A_2]_{1\tau(1)}\cdots[A_2]_{l_2\tau(l_2)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_{l_1},\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)}\cdot\operatorname{sgn}(\tau)\cdot[A_2]_{1\tau(1)}\cdots[A_2]_{l_2\tau(l_2)}=$$

$$(\sum_{\sigma\in S_{l_1}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)})\cdot(\sum_{\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\tau)\cdot[A_2]_{1\tau(1)}\cdots[A_2]_{l_2\tau(l_2)})=$$

וע"פ הגדרת הדטרמיננטה:

$$(\sum_{\sigma\in S_{l_1}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot[A_1]_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot[A_1]_{l_1\sigma(l_1)})\cdot(\sum_{\tau\in S_{l_2}}\operatorname{sgn}(\tau)\cdot[A_2]_{1\tau(1)}\cdots[A_2]_{l_2\tau(l_2)})=|A_1|\cdot|A_2|$$

ובסה"כ $|B|=|A_1|\cdot|A_2|$.

שלב המעבר: נניח נכונות הטענה עבור n טבעי כלשהו, כלומר

$|A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|$. נוכיח נכונות הטענה עבור $n+1$, כלומר נוכיח

$|A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n\oplus A_{n+1}|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|\cdot|A_{n+1}|$:

$$|A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n\oplus A_{n+1}|=|(A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n)\oplus A_{n+1}|=$$

ע"פ מה שהוכחנו עבור n=2:

$$|(A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n)\oplus A_{n+1}|=|A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n|\cdot|A_{n+1}|$$

וע"פ הנחת האינדוקציה:

$$|A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n|\cdot|A_{n+1}|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|\cdot|A_{n+1}|$$

ובסה"כ $|A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n \oplus A_{n+1}| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot ... \cdot|A_n|\cdot|A_{n+1}|$.

הראינו נכונות הטענה עבור 1 ושאם היא נכונה עבור n טבעי כלשהו אזי היא נכונה עבור $n+1$ ולכן ע"ס אקסיומת האינדוקציה היא נכונה לכל n טבעי.

ב. <u>טענת עזר</u>

יהיו מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ופולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. $p(A)=0$ אמ"מ $m_A(x) \mid p(x)$.

<u>הוכחה:</u> יהיו מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ופולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$.

$\Leftarrow$ נניח $p(A)=0$. ניתן לכתוב $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n (a_n \neq 0, n \in \mathbb{N})$ ולכן $p(A)=a_0I+a_1A+...+a_nA^n=0$. כמו כן נסמן $m_A(x)=b_0+b_1x..+x^k (k \in \mathbb{N})$ (הפולינום המינימאלי הינו מתוקן), אזי על פי הגדרה $m_A(A)=b_0+b_1A..+b_kA^k=0$. כמו כן נשים לב כי על פי הגדרת הפולינום המינימאלי $k \le n$, לכן $q_n(x)=a_nx^{n-k}$ פולינום, נביט ב $p_1(x)=p(x)-m_A(x)q_n(x)$:

$$p_1(x)=p(x)-m_A(x)q_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n-(b_0+b_1x+...+x^k)(a_nx^{n-k})=$$
$$a_0+a_1x+...+a_nx^n-b_0a_nx^{n-k}-b_1a_nx^{n-k+1}-...-a_nx^n=$$
$$a_0+a_1x+..a_{n-1}x^{n-1}-b_0a_nx^{n-k}-b_1a_nx^{n-k+1}-...-b_{k-1}x^{n-1}=$$
$$c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1} (\forall i \in \{1,..,n-1\}: c_i \in \mathbb{F})$$

כמו כן $c_0+c_1A+...+c_{n-1}A^{n-1}=p_1(A)=p(A)-m_A(A)\cdot q_n(A)=0-0\cdot q_n(A)=0$, ומכך נובע על פי הגדרת הפולינום המינימאלי כי $\deg(p_1(x)) \ge k$ או $p_1(x)=0$. אם $p_1(x)=0$ אזי: $p(x)=m_A(x)\cdot q_n(x) \Leftarrow 0=p(x)-m_A(x)\cdot q_n(x)$, ולכן $m_A(x) \mid p(x)$ כנדרש. אם $\deg(p_1(x)) \ge k$, כיוון ש $p_1(A)=0$ נוכל להפעיל על $p_1(x)$ את אותו תהליך. נגיע או ל $p_1(x)=m_A(x)\cdot q_{n-1}(x) \Leftarrow 0=p_1(x)-m_A(x)\cdot q_{n-1}(x)$ ואז נוכל לכתוב $p(x)=m_A(x)\cdot(q_n(x)+q_{n-1}(x)) \Leftarrow m_A(x)\cdot q_{n-1}(x)=p(x)-m_A(x)\cdot q_n(x)$ ומכך ינבע $m_A(x) \mid p(x)$ כנדרש. אחרת נקבל פולינום $p_2(x)$ עבורו $p_2(A)=0$, וכמובן מעלתו קטנה ממעלת $p_1(x)$ (מאופן בנייתו) וכן $\deg(p_2(x)) \ge k$, ונוכל לחזור על התהליך, כאשר במידה ונגיע לפולינום האפס נקבל כי $m_A(x) \mid p(x)$.

במידה ולא נגיע לפולינום האפס נמשיך בתהליך עד שנגיע לפולינום $p_i(x)$ אשר מעלתו k (נגיע בסופו של דבר למעלה k שכן התחלנו ממעלה $k \le n$, ובכל שלב אנו מחסרים לפחות 1 מן המעלה, לא נרד ממעלת k כי $p_i(A)=0$ ואם מעלתו קטנה מk נקבל סתירה להגדרת הפולינום המינימלי), ואשר נבנה באופן $p_i(x)=p(x)-m_A(x)(q_n(x)+...+q_l(x))(l \in \mathbb{N})$, ומקיים $p_i(A)=0$, נתקנו לפולינום $p_i^*(x)$ ויתקיים $c\cdot p_i^*(x)=p_i(x)=p(x)-m_A(x)(q_n(x)+...+q_l(x))(0 \neq c \in \mathbb{R})$.

אך $p_i^*(x)$ פולינום מתוקן ממעלה k המקיים $p_i^*(A)=\frac{1}{c}p_i(A)=0$. מכך נובע על פי יחידות הפולינום המינימאלי כי $p_i^*(x)=m_A(x)$, נציב ב $c\cdot p_i^*(x)=p(x)-m_A(x)(q_n(x)+...+q_l(x))$:

$$c\cdot m_A(x)=p(x)-m_A(x)(q_n(x)+...+q_l(x))$$
$$c\cdot m_A(x)+m_A(x)(q_n(x)+...+q_l(x))=p(x)$$
$$m_A(x)(c+q_n(x)+...+q_l(x))=p(x)$$

ומכך נובע $m_A(x) \mid p(x)$.

$\Rightarrow$ נניח $m_A(x) \mid p(x)$, אזי קיים $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $p(x) = m_A(x) \cdot q(x)$, לכן:

$$p(A) = m_A(A) \cdot q(A) = 0 \cdot q(A) = 0$$

מ.ש.ל.

תהי $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$.

נראה כי $p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot p_{A_n}(x)$: (נשתמש בהגדרת הפולינום האופייני)

$$p_A(x) = |xI - A| = |xI - (A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)| = \left| xI - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} xI - A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & xI - A_n \end{pmatrix} \right| = |(xI - A_1) \oplus \ldots \oplus (xI - A_n)| =$$

ע"פ סעיף א':

$$|(xI - A_1) \oplus \ldots \oplus (xI - A_n)| = |xI - A_1| \cdot \ldots \cdot |xI - A_n| = p_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot p_{A_n}(x)$$

ובסה"כ $p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot p_{A_n}(x)$.

נשים לב כי $m_{A_1}(x), \ldots, m_{A_n}(x)$ מתוקנים לכן lcm שלהם מוגדר כמכפלת של אותם גורמים אי-פריקים במעלה המינימלית המשותפת לכל הפולינומים) ולכן הוא lcm מתוקן.

עתה נראה כי $m_A(x) = lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$, מתקיים:

$$lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A) = lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) =$$

$$lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_1) \oplus \ldots \oplus lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_n) =$$

$\forall i \in \{1,..,n\} : m_{A_i}(x) \mid lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$ ולכן על פי טענת העזר

$\forall i \in \{1,..,n\} : lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_i) = 0$:

$$lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_1) \oplus \ldots \oplus lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))(A_n) = 0 \oplus .. \oplus 0 = 0$$

עתה נראה כי זהו הפולינום המינימאלי המאפס את A: יהי פולינום $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ ממעלה קטנה יותר מ $lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$, אזי על פי הגדרת הכפולה המשותפת המינימאלית $\exists i \in \{1,..,n\} : \neg(m_{A_i} \mid q(x))$, עבור ה i הנ"ל ע"פ טענת העזר $q(A_i) \neq 0$, עתה:

$$q(A) = q(A_1 \oplus \ldots \oplus A_i \oplus \ldots \oplus A_n) = q(A_1) \oplus \ldots \oplus q(A_i) \oplus \ldots \oplus q(A_n) =$$

$$\begin{pmatrix} q(A_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & q(A_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q(A_n) \end{pmatrix}$$

עתה $q(A_i) \neq 0$ לכן $\begin{pmatrix} q(A_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & q(A_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & q(A_n) \end{pmatrix} \neq 0$, כלומר $q(A) \neq 0$, ובכך

הראינו כי כל פולינום ממעלה קטנה מ $lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$ איננו מאפס את A, וכן $lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$ מאפס את A, ולכן $m_A(x) = lcm(m_{A_1}(x) \cdot \ldots \cdot m_{A_n}(x))$.

(כל עוד לא מצוין אחרת, V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$)

2. ניקח $V=\mathbb{R}^2$, וכן ניקח את תתי-המרחבים שלו $U_1=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $U_3=\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$. מתקיים:

$U_1\cap U_2=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{(0,0)\}\Leftarrow$ סכומם ישר.

$U_2\cap U_3=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}\cap\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{(0,0)\}\Leftarrow$ סכומם ישר.

$U_1\cap U_3=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\cap\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{(0,0)\}\Leftarrow$ סכומם ישר.

עתה נביט ב $(U_1+U_2)\cap U_3$:

$$(U_1+U_2)\cap U_3=(\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}+\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\})\cap\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=$$
$$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\cap\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{(0,x)\mid x\in\mathbb{R}\}\neq\{(0,0)\}$$

ולכן על פי הגדרה הסכום $U_1+U_2+U_3$ אינו ישר.

3. יהי $W=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$:

א. נניח בשלילה כי קיים $i\in\{1,\ldots,k\}$ עבורו קיים $v\neq 0$ כך ש $v\in(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)\cap U_i$. אזי ניתן להציג $v=u_1+\ldots+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_k$ כאשר $\forall j\in(1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k):u_i\in U_i$, וכן $v=u_1+\ldots+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_k\in U_i$. עתה יהי $j\in\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k\}$ האינדקס המקסימאלי עבורו $u_j\neq 0$ (קיים שכן $v\neq 0$), נפלג לשני מקרים:

- $j<i$: נכתוב $v=u_1+\ldots+u_j$, עתה $v\in U_1+\ldots+U_j\subseteq U_1+\ldots+U_j+\ldots+U_{i-1}$ וכן $v\in U_i$, ומכאן $v\in(U_1+\ldots+U_j+\ldots+U_{i-1})\cap U_i$, אך מהנתון שהסכום $U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$ ישר נובע $(U_1+\ldots+U_j+\ldots+U_{i-1})\cap U_i=\{0\}$ ולכן $v=0$ בסתירה.
- $j>i$: נכתוב $v=u_1+\ldots+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_j$, עתה כיוון ש $v\in U_i$ אזי ניתן להציג $v=u_i'(u_i'\in U_i)$, ומכך נובע:

$$u_i'=v=u_1+\ldots+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_{j-1}+u_j$$
$$u_j=-u_1+\ldots-u_{i-1}+u_i'-u_{i+1}+\ldots-u_{j-1}$$

מכך נובע $u_j\in U_1+\ldots+U_{j-1}$, כמו כן $u_j\in U_j$ ומכאן $u_j\in(U_1+\ldots+U_{j-1})\cap U_j$, אך מהנתון שהסכום $U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$ ישר נובע $(U_1+\ldots+U_{j-1})\cap U_j=\{0\}$ ולכן $u_j=0$ בסתירה להיות j האינדקס המקסימאלי עבורו $u_j\neq 0$.

מהסתירה נובע כי לכל $i\in\{1,\ldots,k\}$ מתקיים $(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)\cap U_i=\{0\}$ (שני תת-המרחבים מכילים את 0, והסתירה מוכיחה כי חיתוכם לא מכיל אף וקטור נוסף).

ב. תהא $\sigma\in S_k$, נראה כי הסכום ישר: יהי $i\in\{1,\ldots,k\}\Leftarrow\sigma(i)=l\in\{1,\ldots,k\}$ ע"פ סעיף א' $(U_1+\ldots+U_{l-1}+U_{l+1}+\ldots+U_k)\cap U_{\sigma(i)}=\{0\}$. כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל $j\in\{1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,k\}$ קיים $j'\in\{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k\}$ יחיד כך ש $\sigma(j')=j$, לכן $(U_{\sigma(1)}+\ldots+U_{\sigma(i-1)}+U_{\sigma(i+1)}+\ldots+U_{\sigma(k)})\cap U_{\sigma(i)}=\{0\}$, וכיוון ש $U_{\sigma(1)}+\ldots+U_{\sigma(i-1)}\subseteq(U_{\sigma(1)}+\ldots+U_{\sigma(i-1)}+U_{\sigma(i+1)}+\ldots+U_{\sigma(k)})$ נקבל $(U_{\sigma(1)}+\ldots+U_{\sigma(i-1)})\cap U_{\sigma(i)}=\{0\}$, ולכן על פי ההגדרה הסכום ישר.

עתה נראה כי $W=U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$: ידוע $W=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$.

$\subseteq$. יהי $w\in W$, אזי $w=u_1+\ldots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_i\in U_i$. עתה כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל $j\in\{1,\ldots,k\}$ קיים $j'\in\{1,\ldots,k\}$ יחיד כך ש $\sigma(j')=j$, ולכן $w=u_{\sigma(1')}+\ldots+u_{\sigma(k')}$, מקומוטטיביות ביחס לחיבור נקבל $w=u_{\sigma(1)}+\ldots+u_{\sigma(k)}$ ומכאן $w\in U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$. הראינו $W\subseteq U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$.

$\supseteq$. יהי $w\in U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$, אזי $w=u_{\sigma(1)}+\ldots+u_{\sigma(k)}$, עתה כיוון ש σ חח"ע ועל אזי לכל $j\in\{1,\ldots,k\}$ קיים $j'\in\{1,\ldots,k\}$ יחיד כך ש $\sigma(j')=j$, ולכן $w=u_{\sigma(1')}+\ldots+u_{\sigma(k')}$ מקומוטטיביות ביחס לחיבור וכן מכך נובע $w=u_1+\ldots+u_k$, כלומר $w\in U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k=W$. בכך הוכחנו $W\supseteq U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$

בסה"כ הראינו כי $W=U_{\sigma(1)}\oplus U_{\sigma(2)}\oplus\ldots\oplus U_{\sigma(k)}$.

ג. יהי $w\in W$, כיוון ש $W=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$ קיימת הצגה $w=u_1+\ldots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_i\in U_i$. נניח בשלילה כי קיימת הצגה שונה $w=u_1'+\ldots+u_k'$ כך ש $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_i,u_i'\in U_i$. נחסר בין שתי ההצגות ונקבל:

$$0=u_1'+\ldots+u_k'-(u_1+\ldots+u_k)$$
$$0=(u_1'-u_1)+\ldots+(u_k'-u_k)$$

כיוון שההצגות שונות $\exists i\in\{1,\ldots,k\}:u_i\neq u_i'$, כלומר $u_i-u_i'\neq 0$, נעביר מחובר זה אגף:

$$(u_i'-u_i)=(u_1'-u_1)+\ldots+(u_{i-1}'-u_{i-1})+(u_{i-1}'-u_{i-1})+\ldots+(u_k'-u_k)$$

ע"פ סגירות לחיבור $\forall i\in\{1,..,k\}:u_i-u_i'\in U_i$ ולכן מהשוויון נובע $(u_i'-u_i)\in U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k$, אך כמו כן $u_i'-u_i\in U_i$. כלומר, $(u_i'-u_i)\in(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)\cap U_i$. אך כיוון שהסכום ישר על פי סעיף א' $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:(U_1+\ldots+U_{i-1}+U_{i+1}+\ldots+U_k)\cap U_i=\{0\}$, ומכך נובע $(u_i'-u_i)=0$ בסתירה ל $u_i-u_i'\neq 0$. מהסתירה נובע כי הצגת $w\in W$ כ $w=u_1+\ldots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_i\in U_i$ הינה יחידה.

4. יהיו $V=U_1\oplus\ldots\oplus U_k$, $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:B_i$ בסיס של U_i וכן $B=B_1\cup\ldots\cup B_k$.

נוכיח כי B בסיס של V בכך שנראה כי B קבוצה פורשת ובת"ל. נסמן $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:B_i=\{v_{i1},\ldots,v_{il_i}\}$.

פורשת: יהי $v\in V$, כיוון ש $V=U_1\oplus\ldots\oplus U_k$ ניתן להציג $v=u_1+\ldots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_i\in U_i$. $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:B_i$ בסיס של U_i לכן קיימת הצגה $u_i=\alpha_{i1}v_{i1}+\ldots+\alpha_{il_i}v_{il_i}$, נציב ונקבל $v=(\alpha_{11}v_{11}+\ldots+\alpha_{1l_i}v_{1l_i})+\ldots+(\alpha_{k1}v_{k1}+\ldots+\alpha_{kl_i}v_{kl_i})$, בכך קיבלנו הצגה של v כצ"ל של איברי B, לכן B פורשת.

בת"ל: יהי $\alpha_{11}v_{11}+\ldots+\alpha_{1l_i}v_{1l_i}+\ldots+\alpha_{k1}v_{k1}+\ldots+\alpha_{kl_i}v_{kl_i}=0$ צירוף ליניארי מתאפס של איברי B. נניח בשלילה כי הצירוף איננו טריוויאלי, כלומר $\exists i\in\{1,\ldots,k\},j\in\{1,\ldots,l_i\}:\alpha_{ij}\neq 0$, ולכן כיוון ש B_i בסיס (ומכאן בת"ל וצירוף ליניארי מתאפס הינו טריוויאלי) נקבל $\alpha_{i1}v_{i1}+\ldots+\alpha_{il_i}v_{il_i}\neq 0$, עתה נסמן $\forall j\in\{1,\ldots,k\}:\alpha_{j1}v_{j1}+\ldots+\alpha_{jl_i}v_{jl_i}=u_j$. כיוון ש $\forall j\in\{1,\ldots,k\}:B_j$ בסיס של U_j $\forall i\in\{1,\ldots,k\}:u_j\in U_j$, וכפי שהראינו $u_i=\alpha_{i1}v_{i1}+\ldots+\alpha_{il_i}v_{il_i}\neq 0$. נקבל הצירוף

$u_1+\dots+u_k=0$. נעביר את u_i אגף: $u_1+\dots+u_{i-1}+u_{i+1}+\dots+u_k=-u_i$. עתה $-u_i\in U_i$ וכן $-u_i=u_1+\dots+u_{i-1}+u_{i+1}+\dots+u_k\in U_1+\dots+U_{i-1}+U_{i+1}+\dots+U_k$ ולכן $-u_i\in(U_1+\dots+U_{i-1}+U_{i+1}+\dots+U_k)\cap U_i$. ע"פ שאלה 3 סעיף א' כיוון ש $U_1\oplus\dots\oplus U_k$ סכום ישר $\forall i\in\{1,\dots,k\}:(U_1+\dots+U_{i-1}+U_{i+1}+\dots+U_k)\cap U_i=\{0\}$, לכן במקרה זה $-u_i=0$, כלומר $u_i=0$ בסתירה לכך שהראינו כי $u_i\neq 0$. מהסתירה נובע כי הצירוף טריוויאלי ולכן B בת"ל.

הראינו כי B קבוצה בת"ל ופורשת בV ולכן על פי הגדרה B בסיס של V.

5. יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T.

א. נראה כי $\forall i\in\{1,\dots,k\}:(\ker(T|_{U_1})+\dots+\ker(T|_{U_{i-1}}))\cap\ker(T|_{U_i})=\{0\}$: יהי $i\in\{1,\dots,k\}$ וכן יהי $v\in(\ker(T|_{U_1})+\dots+\ker(T|_{U_{i-1}}))\cap\ker(T|_{U_i})$. נשים לב כי $\forall i\in\{1,\dots,k\}:\ker(T|_{U_i})\subseteq U_i$. לכן $v\in(\ker(T|_{U_1})+\dots+\ker(T|_{U_{i-1}}))\subseteq U_1+\dots+U_{i-1}$, וכן $v\in\ker(T|_{U_i})\subseteq U_i$ ומכך נובע $v\in(U_1+\dots+U_{i-1})\cap U_i$. עתה כיוון ש $U_1\oplus\dots\oplus U_k$ סכום ישר אזי על פי הגדרה $\forall i\in\{1,\dots,k\}:(U_1+\dots+U_{i-1})\cap U_i=\{0\}$ ולכן $v=0$, ובכך הראינו כי $\forall i\in\{1,\dots,k\}:(\ker(T|_{U_1})+\dots+\ker(T|_{U_{i-1}}))\cap\ker(T|_{U_i})=\{0\}$, ולכן על פי הגדרה הסכום $\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$ הינו סכום ישר.

עתה נראה כי $\ker(T)=\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$:

$\subseteq$. יהי $v\in\ker(T)$, אזי $v\in V$ וע"פ $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ ניתן להציג $v=u_1+\dots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\dots,k\}:u_i\in U_i$. עתה על פי $v\in\ker(T)$:

$0=T(v)=T(u_1+\dots+u_k)=T(u_1)+\dots+T(u_k)$

כיוון ש $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T $\forall i\in\{1,\dots,k\}:T(u_i)\in U_i$. עתה ניתן לקחת $\forall i\in\{1,\dots,k\}:T(u_i)=0\in U_i$, והשוויון יתקיים. אילו הם הערכים היחידים עבורם יתקיים השוויון על פי תרגיל 3 סעיף ג' הקובע כי ההצגה הנ"ל של וקטור היא יחידה (וכן נציין $0\in V$). לכן $\forall i\in\{1,\dots,k\}:T(u_i)=0\in U_i$ ומכך נובע $\forall i\in\{1,\dots,k\}:u_i\in\ker(T|_{U_i})$, לכן $v\in\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$. ובכך הראינו $\ker(T)\subseteq\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$.

$\supseteq$. יהי $v\in\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$. ניתן להציג $v=u_1+\dots+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,\dots,k\}:u_i\in\ker(T|_{U_i})\subseteq U_i$. עתה:

$T(v)=T(u_1+\dots+u_k)=T(u_1)+\dots+T(u_k)=0+\dots+0=0$

לכן $v\in\ker(T)$. בכך הראינו $\ker(T)\supseteq\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$.

בסה"כ הראינו כי $\ker(T)=\ker(T|_{U_1})\oplus\dots\oplus\ker(T|_{U_k})$.

ב. נראה כי $\forall i\in\{1,\dots,k\}:(\mathrm{Im}(T|_{U_1})+\dots+\mathrm{Im}(T|_{U_{i-1}}))\cap\mathrm{Im}(T|_{U_i})=\{0\}$: יהי $i\in\{1,\dots,k\}$ וכן יהי $v\in(\mathrm{Im}(T|_{U_1})+\dots+\mathrm{Im}(T|_{U_{i-1}}))\cap\mathrm{Im}(T|_{U_i})$. נשים לב כי $\forall i\in\{1,\dots,k\}:\mathrm{Im}(T|_{U_i})\subseteq U_i$ שכן $\forall i\in\{1,\dots,k\}:U_i$ אינווריאנטים תחת T. לכן $v\in(\mathrm{Im}(T|_{U_1})+\dots+\mathrm{Im}(T|_{U_{i-1}}))\subseteq U_1+\dots+U_{i-1}$, וכן $v\in\mathrm{Im}(T|_{U_i})\subseteq U_i$ ומכך נובע $v\in(U_1+\dots+U_{i-1})\cap U_i$. עתה כיוון ש $U_1\oplus\dots\oplus U_k$ סכום ישר אזי על פי

הגדרה $\forall i\in\{1,...,k\}:(U_1+...+U_{i-1})\cap U_i=\{0\}$ ולכן $v=0$, ובכך הראינו כי $\forall i\in\{1,...,k\}:(\mathrm{Im}(T|_{U_1})+...+\mathrm{Im}(T|_{U_{i-1}}))\cap \mathrm{Im}(T|_{U_i})=\{0\}$, ולכן על פי הגדרה הסכום $\mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$ הינו סכום ישר.

עתה נראה כי $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$:

$\subseteq$. יהי $v\in \mathrm{Im}(T)$, אזי $\exists u\in V:T(u)=v$ וע"פ $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ ניתן להציג $u=u_1+...+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,...,k\}:u_i\in U_i$. עתה:

$$v=T(u)=T(u_1+...+u_k)=T(u_1)+...+T(u_k)\in \mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$$

ובכך הראינו כי $\mathrm{Im}(T)\subseteq \mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$

$\supseteq$. יהי $v\in \mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$. ניתן להציג $v=u_1+...+u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,...,k\}:u_i\in \mathrm{Im}(T|_{U_i})$, כלומר $\forall i\in\{1,...,k\},\exists v_i\in U_i:T(v_i)=u_i$. עתה:

$$v=u_1+...+u_k=T(v_1)+...+T(v_k)=T(v_1+...+v_k)$$

$\forall i\in\{1,...,k\}:v_i\in U_i\subseteq V$ לכן $v_1+...+v_k\in V$. כלומר $v\in \mathrm{Im}(T)$. בכך הראינו $\mathrm{Im}(T)\supseteq \mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$.

בסה"כ הראינו כי $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus \mathrm{Im}(T|_{U_k})$.

6. יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T. כמו כן לכל $i=1,...,k$ יהי B_i בסיס של U_i, ונסמן $B=B_1\cup...\cup B_k$. נסמן $B=\{v_1,...,v_{|B|}\}$ נראה כי $[T]_B=[T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k}$ ע"י כך שנראה שכל העמודות שוות בין שני האגפים, כלומר $\forall i\in\{1,...,|B|\}:C_i([T]_B)=C_i([T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k})$.

יהי $i\in\{1,...,|B|\}$. נסתכל על $C_i([T]_B)$, ע"פ הגדרת $[T]_B$: $C_i([T]_B)=[T(v_i)]_B$, נשים לב כי $\exists j\in\{1,...,k\}:v_i\in B_j$ וכן $B_j\subseteq U_j$, ומכיוון ש U_j אינווריאנטי תחת T נקבל $T|_{U_j}(v_i)\in U_j$. עתה כיוון ש B_j בסיס של U_j נוכל להציג

$\left[T|_{U_j}(v_i)\right]_{B_j}=\begin{pmatrix}\alpha_l & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}$, ולכן כיוון שהצגה לפי בסיס היא יחידה

$[T(v_i)]_B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \alpha_l & \cdots & \alpha_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ כלומר

$$C_i([T]_B)=[T(v_i)]_B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \left[T|_{U_j}(v_i)\right]_{B_j} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

עתה נסתכל על $C_i([T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k})$. בתאים שאינם בתחום של $[T|_{U_1}]_{B_j}$ יהיו אפסים (מהגדרת הסכום הישר של מטריצות), בתחום של $[T|_{U_1}]_{B_j}$ העמודה ה i על פי הגדרת המטריצה המייצגת היא: $\left[T|_{U_1}(v_i)\right]_{B_j}$. בסה"כ

$$C_i([T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k})=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \left[T|_{U_j}(v_i)\right]_{B_j} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

לכן בסה"כ קיבלנו כי $C_i([T]_B)=C_i([T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k})$ עבור $i\in\{1,...,|B|\}$

כללי. כלומר $\forall i\in\{1,...,|B|\}:C_i([T]_B)=C_i([T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k})$, ומכך נובע כי

$[T]_B=[T|_{U_1}]_{B_1}\oplus...\oplus[T|_{U_k}]_{B_k}$.

7. יהי $V=U_1\oplus...\oplus U_k$, ולכל $i=1,...,k$ יהי $T_i:U_i\to U_i$ אופרטור. נגדיר $T:V\to V$ בצורה הבאה: לכל $v\in V$ יש הצגה יחידה $v=u_1+...+u_k$ כך ש $\forall i\in\{1,...,k\}:u_i\in U_i$.

נגדיר: $T(v):=T_1(u_1)+...+T_k(u_k)$. הפונקציה T תסומן $T_1\oplus...\oplus T_k$.

א. כפי שראינו בהגדרה $T:V\to V$, נוכיח כי זו העתקה ליניארית:

- חיבור: יהיו $v_1,v_2\in V$, והצגותיהם $\forall i\in\{1,2\}:v_i=u_{i1}+...+u_{ik}$ כך ש $\forall i\in\{1,2\},j\in\{1,...,k\}:u_{ij}\in U_j$. אזי $v_1+v_2=(u_{11}+u_{21})+...+(u_{1k}+u_{2k})$ (שימוש בקומוטטיביות בחיבור) כאשר $\forall j\in\{1,...,k\}:(u_{1_j}+u_{2_j})\in U_j$ (סגירות לחיבור). עתה על פי הגדרה:

$T(v_1+v_2)=T_1(u_{11}+u_{21})+...+T_k(u_{1k}+u_{2k})=$

כיוון ש $\forall i\in\{1,...,k\}:T_i$ אופרטור, אזי הוא מקיים שימור חיבור, כלומר $\forall i\in\{1,...,k\},\forall w_1,w_2\in U_i:T_i(w_1+w_2)=T_i(w_1)+T_i(w_2)$:

$T_1(u_{11}+u_{21})+...+T_k(u_{1k}+u_{2k})=T_1(u_{11})+T_1(u_{21})+...+T_k(u_{1k})+T_k(u_{2k})=$

$T_1(u_{11})+...+T_k(u_{1k})+T_1(u_{21})+...+T_k(u_{2k})=$

על פי הגדרת T:

$T_1(u_{11})+...+T_k(u_{1k})+T_1(u_{21})+...+T_k(u_{2k})=T(v_1)+T(v_2)$

ובסה"כ $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.

- כפל בסקלר: יהיו $v\in V$, $\alpha\in\mathbb{F}$ וההצגה $v=u_1+...+u_k$ כך ש $\forall i\in\{1,...,k\}:u_i\in U_i$, אזי $\alpha v=\alpha(u_1+...+u_k)=\alpha u_1+...+\alpha u_k$ כאשר $\forall i\in\{1,...,k\}:\alpha u_i\in U_i$ (סגירות לכפל בסקלר). עתה על פי הגדרה:

$T(\alpha v)=T_1(\alpha u_1)+...+T_k(\alpha u_k)=$

כיוון ש $\forall i\in\{1,...,k\}:T_i$ אופרטור, אזי הוא מקיים שימור כפל בסקלר, כלומר $\forall i\in\{1,...,k\},\forall w\in U_i,\alpha\in\mathbb{F}:T_i(\alpha w)=\alpha T_i(w)$:

$T_1(\alpha u_1)+...+T_k(\alpha u_k)=\alpha T_1(u_1)+...+\alpha T_k(u_k)=\alpha(T_1(u_1)+...+T_k(u_k))=$

על פי הגדרת T:

$\alpha(T_1(u_1)+...+T_k(u_k))=\alpha T(v)$

ובסה"כ $T(\alpha v)=\alpha T(v)$.

הראינו כי $T:V\to V$ משמרת חיבור וכפל בסקלר ולכן על פי הגדרה היא אופרטור.

<u>טענת עזר</u>

בסימונים הנ"ל, מתקיים:

א. $\forall i\in\{1,...,k\}:T|_{U_i}=T_i$.

ב. לכל $i=1,...,k$, U_i אינווריאנטי תחת T.

<u>הוכחה:</u> א. (נשים לב כי להעתקות אותו תחום) יהי $i\in\{1,...,k\}$, ויהי $u\in U_i$, אזי $u\in V=U_1\oplus...\oplus U_k$ והצגתו $u=0+...+0+u+0+...+0\in U_1\oplus...\oplus U_k$, לכן:

$T(u)=T_1(0)+...+T_{i-1}(0)+T_i(u)+T_{i+1}(0)+...+T_k(0)=$

לכל $i=1,...,k$, $T_i:U_i\to U_i$ אופרטור, ולכן $T_i(0)=0$:

$$T_1(0)+...+T_{i-1}(0)+T_i(u)+T_{i+1}(0)+...+T_k(0)=0+...+0+T_i(u)+0+...+0=T_i(u)$$

ובסה"כ $\forall u\in U_i:T(u)=T_i(u)$, ותחומם אותו תחום (ומכאן על פי השוויון טווחם אותו טווח) ובסה"כ $T|_{U_i}=T_i$. כלומר $\forall i\in\{1,...,k\}:T|_{U_i}=T_i$.

ב. הראינו $\forall i\in\{1,...,k\}:T|_{U_i}=T_i$, לכן $\forall i\in\{1,...,k\}:\mathrm{Im}(T|_{U_i})=\mathrm{Im}(T_i)\subseteq U_i$ שכן $T_i:U_i\to U_i$ אופרטור ולכן על פי הגדרה לכל $i=1,...,k$, U_i אינווריאנטי תחת T.

מ.ש.ל.

ב. על פי טענת העזר וכן היות הפונקציה T מסומנת $T_1\oplus...\oplus T_k$ נקבל כי עלינו להוכיח $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus\mathrm{Im}(T|_{U_k})$. אך כיוון שעל פי סעיף א' $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ וכן על פי טענת העזר לכל $i=1,...,k$, U_i אינווריאנטי תחת T , אזי על פי תרגיל 5 סעיף ב' נקבל $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(T|_{U_1})\oplus...\oplus\mathrm{Im}(T|_{U_k})$ כנדרש.

ג. על פי טענת העזר וכן היות הפונקציה T מסומנת $T_1\oplus...\oplus T_k$ נקבל כי עלינו להוכיח $\ker(T)=\ker(T|_{U_1})\oplus...\oplus\ker(T|_{U_k})$. אך כיוון שעל פי סעיף א' $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ וכן על פי טענת העזר לכל $i=1,...,k$, U_i אינווריאנטי תחת T , אזי על פי תרגיל 5 סעיף א' נקבל $\ker(T)=\ker(T|_{U_1})\oplus...\oplus\ker(T|_{U_k})$ כנדרש.

8. יהיו $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T. נסמן $T_i=T|_{U_i}$.

א. נבחין כי על פי איווריאנטיות $\forall i\in\{1,...,k\},\forall u_i\in U_i:T(u_i)=T|_{U_i}(u_i)$, ועל פי הסימון $T|_{U_i}=T_i$. עתה יהי $v\in V$, כיוון ש $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ קיימת הצגה יחידה $v=u_1+...+u_k$ כך ש $\forall i\in\{1,...,k\}:u_i\in U_i$. עתה:

$$T(v)=T(u_1+...+u_k)=$$

T אופרטור ולכן משמר חיבור:

$$T(u_1+...+u_k)=T(u_1)+...+T(u_k)=$$

עתה נשתמש ב $\forall i\in\{1,...,k\},\forall u_i\in U_i:T(u_i)=T_i(u_i)$:

$$T(u_1)+...+T(u_k)=T_1(u_1)+...+T_k(u_k)$$

כלומר $T(v)=T_1(u_1)+...+T_k(u_k)$. ולכן על פי הגדרת הסכום הישר של אופרטורים $T=T_1\oplus...\oplus T_k$.

ב. לכל $i=1,...,k$, B_i בסיס של U_i . וכן $B=B_1\cup...\cup B_k$. על פי הסימון $T|_{U_i}=T_i$ עלינו להוכיח $[T]_B=\left[T|_{U_1}\right]_{B_1}\oplus...\oplus\left[T|_{U_k}\right]_{B_k}$. $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus...\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T ולכן על פי תרגיל 6 נקבל $[T]_B=\left[T|_{U_1}\right]_{B_1}\oplus...\oplus\left[T|_{U_k}\right]_{B_k}$ כנדרש.