<u>פתרון תרגיל 8</u>

1) מצאו את הנקודה על הישר $y=2x+3$ שמרחקה מראשית הצירים הוא הקטן ביותר. מהו המרחק?

<u>פתרון</u>

כל נקודה על הישר $y=2x+3$ היא מהצורה $(x,2x+3)$ ומרחקה מהראשית הוא $f(x)=\sqrt{x^2+(2x+3)^2}$. עלינו למצוא את המינימום של $f(x)$. ברור של $f(x)$ מינימום בנקודה מסוימת אם ורק אם לפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2=x^2+(2x+3)^2$ יש שם מינימום.

נמצא את הנקודות הקריטיות של g. מתקיים g גזירה בכל נקודה ממשית, $g'(x)=2x+2(2x+3)\cdot 2$. לכן אם $g'(x)=10x+12=0$ אז $x=-\frac{6}{5}$ וקיבלנו נקודה קריטית יחידה. ממבחן הנגזרת השניה נקבל $g''(x)=10>0 \quad \forall x$ ולכן בנקודה מתקבל מינימום (גלובלי). לכן, הנקודה הדרושה על הישר היא $\left(-\frac{6}{5},\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot 2+3\right)=\left(-\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$. המרחק הוא $f\left(\frac{-6}{5}\right)=\sqrt{\frac{36}{25}+\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{\sqrt{5}}$. שימו לב : חישוב המרחק מתבצע ע"י הצבה בפונקציה f ולא בפונקציה g.

2) מצאו מינימום ומקסימום גלובאלי עבור $f(x)=3+|1-x|$.

<u>פתרון</u>

$f(x)=\begin{cases}4-x & x\le 1\\ x+2 & x>1\end{cases}$. ניתן לבדוק עפ"י ההגדרה ש

$f'(x)=\begin{cases}-1 & x<1\\ undefined & x=1\\ 1 & x>1\end{cases}$ (בדקו!) לכן ישנה נקודה קריטית יחידה $x=1$

ובה הנגזרת לא קיימת. ניעזר במבחן הישיר $f(0)=4>f(1)=3<f(2)=4$ ומכאן ב $x=1$ מתקבל מינימום גלובלי והמינימום הוא 3. קל לראות שלא מתקבל מקסימום גלובלי שכן לכל $x>y>1$ מתקיים $f(x)>f\left(y\right)>f(1)$ (כי הנגזרת חיובית בתחום $x>1$ ולכן הפונקציה עולה שם ממש). באופן דומה לכל $1>x>y$ מתקיים $f(1)<f(x)<f\left(y\right)$ ומכאן ניתן להסיק שלא מתקבל מקסימום (איך?).

דרך נוספת: נניח בשלילה שמתקבל מקסימום גלובלי שערכו $M>1$. מתקיים $f\left(M\right)=M+2>M$. סתירה.

3) תהי $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

א) האם קיימת הנגזרת השניה $f''(0)$? אם כן חשבו אותה. אם לא, הוכיחו שאינה קיימת.

ב) האם לפונקציה קיים מקסימום גלובאלי? אם כן, חשבו אותו. אם לא, הוכיחו שלא.

ג) חקרו את הפונקציה (לפי נקודות קיצון גלובאליות ולוקליות, תחומי עליה וירידה, תחומי קמירות קעירות, נקודות פיתול, ציור).

<u>**פתרון**</u>

א) $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. יהי Δx אינפי' שונה מאפס $\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\frac{4}{3\sqrt[3]{\left(\Delta x\right)^2}}$ אינסופי ולכן $f''(0)$ אינה קיימת.

ב) לא קיים מקסימום גלובאלי.

דרך א: עפ"י הנגזרת הפונקציה עולה ממש בכל $\mathbb{R}$. היא חיובית פרט לנקודה אחת בה היא מתאפסת. מכאן שלא יכול להתקבל מקסימום גלובלי.

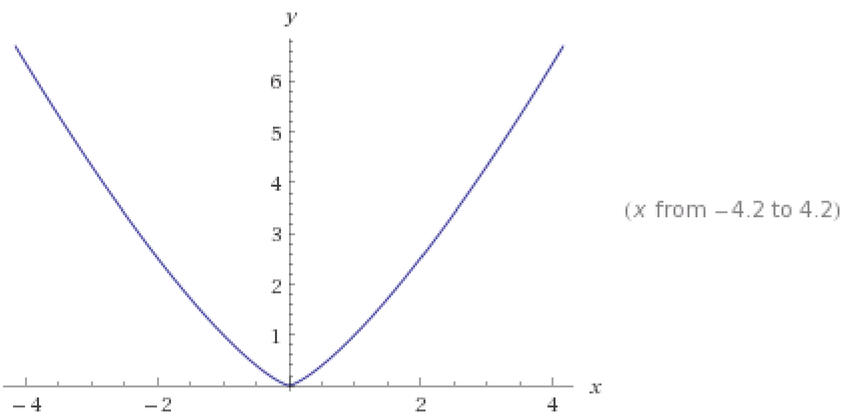
דרך ב: נניח בשלילה שהערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת הוא $M>0$. יהי $N>M$ מתקיים $f\left(N^{\frac{3}{4}}\right)=N>M$. סתירה.

ג) $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}=0$ $\Leftarrow$ $x=0$ נקודה קריטית יחידה. הנגזרת השניה לא קיימת בנקודה לכן ניעזר במבחן הישיר. $-1<0<1$ ומתקיים $f(-1)=f(1)=1>0=f(0)$ לכן $(0,0)$ מינימום גלובלי ובפרט מקומי. עפ"י סעיף ב לא קיים מקסימום גלובלי.

תחומי עליה וירידה- אפשר לפי נקודת המינימום היחידה או לפי הנגזרת הראשונה לקבוע :תחומי עליה-$(-\infty,0)$. תחומי ירידה-$(0,\infty)$.

תחומי קמירות/קעירות: $f''(x)=\frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}>0$ $\forall x\neq 0$ לכן f קמורה.

ציור-



4) חקרו את הפונקציות הבאות:

א) $f(x)=x^3-3x^2$.

ב) $f(x)=xe^x$.

ג) $f(x)=\ln(\sin(x))$ בתחום $(0,\pi)$.

ד) $f(x)=\sin^2(x)$ בתחום $[0,\pi]$.

פתרון:שימו לב שהנגזרת השניה קיימת ורציפה עבור כל הפונקציות בתחומים הנ"ל ולכן ניתן להשתמש בשיטת הטבלה. בד"כ אפשר להסיק מסקנות מהטבלאות ביותר מדרך אחת.

א) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Leftarrow x=0,2$ נקודות קריטיות.

$f''(x)=6x-6=0 \Leftarrow x=1$.

מספיק להוסיף נקודה משמאל לאפס ונקודה מימין ל 2 בשביל חקירת הפונקציה.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

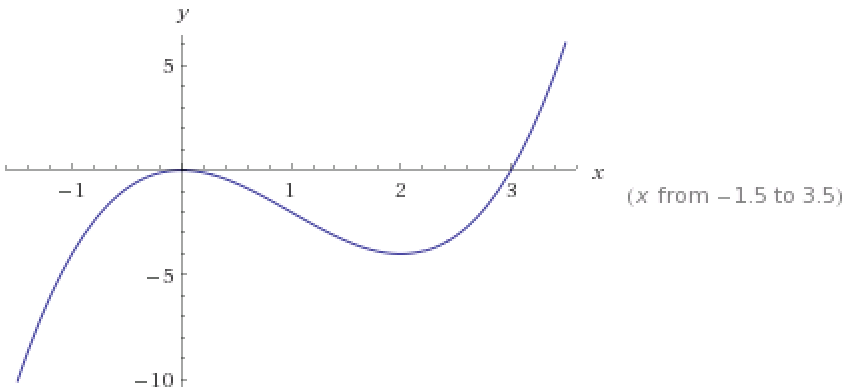
מהטבלה ניתן להסיק:

$(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי (לפי הסימן של הנגזרת השניה למשל). בצורה דומה ניתן להסיק ש$(2,-4)$ נקודת מינימום מקומי. $(0,0)$ אינה נקודת מקסימום גלובלי. קל לראות שהפונקציה יכולה לקבל ערכים חיוביים. מכאן אין לפונקציה מקסימום גלובלי (אם היה אז הוא היה אמור להיות גם מקסימום מקומי).

כמו כן קל לראות ש-4 אינו הערך המינימלי של הפונקציה ולכן לפונקציה אין מינימום גלובלי.

עפ"י סימן הנגזרת הראשונה- תחומי עליה: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, תחומי ירידה : $(0,2)$.

עפ"י סימן הנגזרת השניה- תחומי קמירות: $(1,\infty)$, תחומי קעירות: $(-\infty,1)$ והנקודה $(1,-2)$ היא נקודת פיתול.



ב) $x=-1 \Leftarrow f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)=0$ נקודה קריטיות.

$x=-2 \Leftarrow f''(x)=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x)=0$.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$\frac{-3}{e^3}$	$\frac{-2}{e^2}$	$\frac{-1}{e}$	0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$

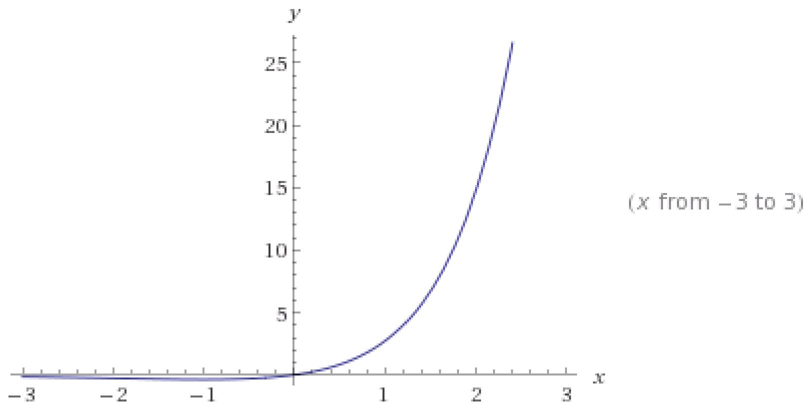
מהטבלה ניתן להסיק:

$\left(-1,\frac{-1}{e}\right)$ נקודת מינימום מקומי וגם גלובלי (כנקודה קריטית פנימית יחידה בתוספת מבחן הנגזרת השניה או המבחן הישיר). אין נקודות קיצון נוספות.

עפ"י סימן הנגזרת הראשונה- תחומי עליה: $(-1,\infty)$. תחומי ירידה: $(-\infty,-1)$

עפ"י סימן הנגזרת השניה- תחומי קמירות: $(-2,\infty)$, תחומי קעירות: $(-\infty,-2)$

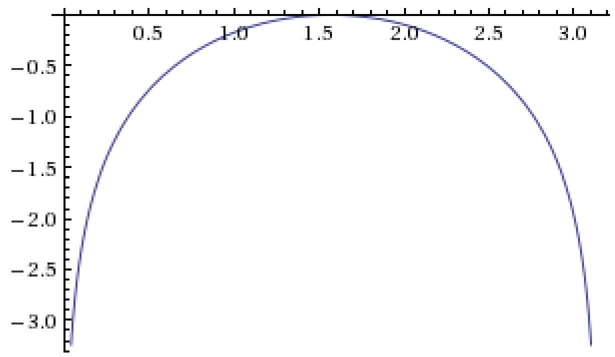
והנקודה $\left(-2,\frac{-2}{e^2}\right)$ היא נקודת פיתול.



ג) $0=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=f'(x) \Leftarrow x=\frac{\pi}{2}$ נקודה קריטית פנימית יחידה בתחום.

$\forall x \quad f''(x)=\frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\frac{-1}{\sin^2(x)}<0$.

מכאן ניתן להסיק ש $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ נקודת מקסימום גלובלי ומקומי. אין עוד נקודות קיצון. אין נקודות פיתול. הפונקציה קעורה בתחום $(0,\pi)$.



ד) $f'(x)=2\sin(x)\cos(x)=0 \Rightarrow \sin(x)=0 \vee \cos(x)=0 \Rightarrow x=0,\frac{\pi}{2},\pi$

נקודות קריטות. שימו לב: $x=\frac{\pi}{2}$ נקודה קריטית פנימית יחידה (שתי האחרות הן בדיוק קצוות הקטע $[0,\pi]$).

$f'(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x) \Rightarrow f''(x)=2\cos(2x)$.

לכן בתחום שלנו

$$f''(x)=2\cos\left(2x\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(2x\right)=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}.$$

ניעזר בטבלה:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן מקבלת שם מינימום ומקסימום גלובאליים . מספיק להשוות את הערכים בנקודות הקריטיות. נסיק ש:

$(0,0),(\pi,0)$ **נקודות מינימום גלובלי (לא מקומי אלו הקצוות),** $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ **מקסימום גלובלי ומקומי.**

עפ"י סימן הנגזרת הראשונה (או על סמך נקודות הקיצון לעיל) - תחומי עליה: $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. תחומי ירידה: $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

עפ"י סימן הנגזרת השניה- תחומי קמירות: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, תחומי קעירות: $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ והנקודות $\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ הן נקודת פיתול.