אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למתמטיקה.

תרגיל 8

<u>שאלה 1:</u>

בדוק אם הסדרות הבאות מתכנסות במידה שווה בקטעים הנתונים ומצא את פונקציית הגבול:

א. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sqrt[n]{\sin x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $(0,\pi)$.

ב. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $(0,\infty)$.

ג. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $(0,\infty)$.

ד. הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\left\{e^{n(x-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $(0,1)$.

<u>שאלה 2:</u>

הוכח כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)$ מתכנסים במידה שווה על כל הישר.

<u>שאלה 3:</u>

בדוק התכנסות במ"ש של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

<u>שאלה 4:</u>

הראה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-a,a]$ עבור $0<a<1$.

<u>שאלה 5:</u>

הוכח כי לכל t בקטע $(-1,1)$ מתקיים:

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}$$

<u>רמז</u>: לכל $t>-1$, $\ln(1+t)=\int_0^t\frac{1}{1+x}dx$ ו- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n$