שאלת אתגר 1 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

29 באוקטובר 2015

יהי $\mathbb{F}$ שדה. נסתכל על הקבוצה

$$\mathbb{F}\times\mathbb{F}=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{F}\}$$

ונגדיר עליה את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned}(a,b)\oplus(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)\odot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc)\end{aligned}$$

שאלה 1. בשאלה זו נבדוק האם קיבלנו שדה.

1. הוכיחו ש-$(\mathbb{F}\times\mathbb{F},\oplus,\odot)$ מקיים את כל האקסיומות של שדה חוץ מקיום הופכיים.
2. הוכיחו: איבר $(a,b)\in\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ הוא הפיך ב-$(\mathbb{F}\times\mathbb{F},\oplus,\odot)$ אם ורק אם $a^2+b^2\neq 0_{\mathbb{F}}$.
3. הסיקו: $(\mathbb{F}\times\mathbb{F},\oplus,\odot)$ הוא שדה אם ורק אם $\forall a\in\mathbb{F}:a^2+1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}}$. כלומר, אם ורק אם אין ל-$-1_{\mathbb{F}}$ שורש ב-$\mathbb{F}$.
4. הסיקו מהמסקנה: $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\odot)$ הוא שדה (שנתעסק בו בשאלה 3), אבל $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},\oplus,\odot)$ הוא לא שדה.

שאלה 2. הוכיחו: ב-$\mathbb{F}\times\mathbb{F}$ קיים איבר (a,b) המקיים $(a,b)^2+1_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$. במילים אחרות, (a,b) הזה הוא "שורש" של $-1_{\mathbb{F}\times\mathbb{F}}$.

שאלה 3. נניח כי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. הסבירו מדוע הבנייה הזו נותנת לנו שדה זהה ל-$\mathbb{C}$.

הערה 4 (הדרכה לשאלה 3). הראו כי אם נתאים ל-(a,b) את המספר המרוכב $a+bi$, אז ההתאמה הזו "תכבד" את הפעולות שלנו. כלומר:

1. $(a,b)\oplus(c,d)$ יותאם ל-$(a+bi)+(c+di)$.
2. $(a,b)\odot(c,d)$ יותאם ל-$(a+bi)\cdot(c+di)$.

להתאמה כזו קוראים **איזומורפיזם של שדות**, והיא אומרת שיש לנו ביד את אותו שדה, רק שקראנו לאיברים שלו בשמות אחרים; למשל, פה פעם אחת קראנו להם (a,b), ופעם אחרת קראנו להם $a+bi$.