אלגברה לינארית 2 תרגול 8 ממ"פ

13 במאי 2021

1 מ"פ

מ"פ על מ"ו V זו פונקציה $\langle , \rangle : V^2 \to \mathbb{F}$ המקיימת:

1. לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

2. הרמיטיות (סימרטיות מעל הממשיים):

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

מסקנה:

$$\langle w, \alpha u+v\rangle = \overline{\langle \alpha u + v, w\rangle} = \overline{\alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\langle u, w\rangle}+\overline{\langle v, w\rangle} = \overline{\alpha}\langle w, u\rangle+\langle w, v\rangle$$

3. אי־שליליות:

$$\langle v, v\rangle \geq 0, \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$$

תרגילים דגומאות:

1. חשבו את המכפלה הסטדנרטית מעל המרוכבים עבור הוקטורים הבאים:

(א)

$$\left\langle v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = v^t\overline{u} = 1\cdot 1 + i\cdot\overline{-i} + 2\cdot 0 = 0$$

(ב)

$$\left\langle v=\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}i\\i\\i\end{pmatrix}\right\rangle=\bar{i}\left\langle v=\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=-i(1+i+2)=1-3i$$

(ג)

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}+(1+2i)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}\right\rangle}_{=0}+\overline{1+2i}\underbrace{\left\langle\begin{pmatrix}1\\i\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{=3+i}$$

$$=(1-2i)(3+i)=5-5i$$

2. יהי V מ"ו, ויהי $v\in V$. הוכיחו:

$$\forall u\in V:\langle v,u\rangle=0\iff v=0$$

פתרון: $\Leftarrow$: הוכחתם בהרצאה.
$\Rightarrow$: כיון שהדבר נכון לכל u, בפרט הוא נכון עבור $u=v$ ונקבל $\langle v,v\rangle=0$ ולכן לפי תכונה (3) נקבל $v=0$.

3. יהי V מ"ו ממימד n, ויהי $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס. יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש־:

$$\forall 1\le k\le n:\langle v_1,u_k\rangle=\langle v_2,u_k\rangle$$

הוכיחו: $v_1=v_2$.
פתרון: נעביר אגף ונקבל:

$$\forall k:0=\langle v_1,u_k\rangle-\langle v_2,u_k\rangle=\langle v_1-v_2,u_k\rangle$$

נראה שמכיון שהדבר נכון עבור בסיס, הוא יהיה נכון עבור כל וקטור. יהי $v\in V$, אז נוכל להציג אותו לפי הבסיס: קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש־ $v=\sum_{k=1}^n\alpha_ku_k$, ולכן:

$$\langle v_1-v_2,v\rangle=\langle v_1-v_2,\sum_{k=1}^n\alpha_ku_k\rangle=\sum_{k=1}^n\left(\overline{\alpha_k}\underbrace{\langle v_1-v_2,u_k\rangle}_{=0}\right)=0$$

כלומר, הוכחנו:

$$\forall v\in V:\langle v_1-v_2,v\rangle=0$$

ואז מתרגיל קודם נובע $v_1-v_2=0$ ולכן $v_1=v_2$.

4. יהי $V=\mathbb{R}^n$, ותהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. נגדיר פונקציה $\langle,\rangle : V^2\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$\langle u,v\rangle=(Au)^tAv$$

הוכיחו: A הפיכה אמ"ם $\langle,\rangle$ מ"פ.

פתרון: במקום להוכיח שני כיוונים כרגיל, נוכיח:

1. אם A הפיכה אז זו מ"פ: פשוט נוכיח את התכונות:

לינאריות:

$$\langle v+u,w\rangle=\left(A(v+u)\right)^tAw=\left(Av+Au\right)^tAw=\left((Av)^t+(Au)^t\right)Aw=(Av)^tAw+(Au)^tAw=\langle v,w\rangle+\langle u,w$$

סימטריות:

$$\langle v,u\rangle=(Av)^tAu=v^tA^tAu$$

$$\langle u,v\rangle=u^tA^tAv$$

נשים לב שההבדל היחיד בין הוקטורים v^tA^tA, A^tAv הוא שהשמאלי וקטור שורה והימני וקטור עמודה, הרכיבים אותם רכיבים בדיוק. הסבר: המטריצה A^tA היא סימטרית, ולכן מצד שמאל נקבל צירוף לינארי של השורות עם רכיבי v ומצד ימין צ"ל של העמודות עם רכיבי v, ובסימטרית זה אותו דבר. ואז הכפל עם u מימין או u^t משמאל לא משנה, בכל מקרה מקבלים כפל של הרכיבים רכיב־רכיב. יותר פורמלי, נוכל לסמן $u=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, $A^tAv=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, ואז נוכל לחזור למעלה:

$$\langle v,u\rangle=(Av)^tAu=v^tA^tAu=(a_1,\dots,a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n a_kb_k$$

$$\langle u,v\rangle=u^tA^tAv=(b_1,\dots,b_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n a_kb_k$$

וקיבלנו שיוויון.

אי־שליליות:

$$\langle v,v\rangle=(Av)^tAv=\sum_{k=1}^n\left((Av)_k\right)^2\geq 0$$

$$\langle v,v\rangle = 0 \iff \sum_{k=1}^{n}\left((Av)_k\right)^2 = 0 \iff \forall k : (Av)_k = 0 \iff v \in N(A) \iff v = 0$$

ה־$\Longleftrightarrow$ האחרון הוא מכיון ש־A הפיכה, נקבל $v=0$.

2. אם A לא הפיכה אז זו לא מ"פ: קיים $0 \neq v \in N(A)$ ואז נקבל $\langle v,v\rangle = 0$ בסתירה לתכונה 3.

2 נורמה

מכפלה פנימית משרה לנו נורמה, שהיא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת:

1. אי־שליליות: $\|v\| \geq 0$, שיוויון אמ"ם $v=0$
2. הוצאת סקלאר: $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. אש"מ: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

דוגמאות:

1. חשבו:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1+i)\overline{1+i} + (-1+i)\overline{-1+i} + 2\cdot\overline{2}} = \sqrt{2+2+4} = \sqrt{8}$$

כאשר הנורמה המושרית מהמ"פ הסטנדרטית היא:

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k \overline{v_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}$$

2. חשבו:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 1^2+2^2 & 3+8 \\ 3+8 & 3^2+4^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{3}$$

עבור הנורמה המושרית מהמ"פ:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{tr(A\overline{A^t})}$$

הערה: באופן כללי, עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים:

$$tr(A\overline{A^t}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|^2$$

3 אורתוגונליות

וקטורים u,v ייקראו אורתוגנליים אם $\langle u,v\rangle=0$. למשל, וקטור האפס או"ג לכל וקטור.
תרגילים ודוגמאות:

.1

$$\left\langle v=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle=v^t\overline{u}=1\cdot1+i\cdot\overline{-i}+2\cdot0=0$$

2. קבוצה $S\subseteq V$ תקרא או"ג אם: $\forall v\neq u\in S:\langle v,u\rangle=0$.

(א) הוכיחו שהקבוצה הבאה או"ג:

$$S=\left\{v=\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}i\\ -1\\ -i\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 2\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: ראינו כבר ש־ $\langle v,w\rangle=0$. נראה את השאר:

$$\langle v,u\rangle=1\cdot(-i)-i\cdot(-1)+0\cdot(-i)=0$$

$$\langle u,w\rangle=i\cdot1-1\cdot(-i)-i\cdot2=0$$

(ב) תהי $S=\{v,u,w\}$ שונים כך ש־ $\langle v,u\rangle=\langle u,w\rangle=0$. הוכיחו או הפריכו: S או"ג.

פתרון: $v=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. התנאים מתקיימים, אך $\langle v,w\rangle=1\neq0$.

3. וקטור ייקרא נורמלי אם $\|v\|=1$. לדוגמא: וקטורי היחידה.

4. קבוצה תיקרא אורתונורמלית אם היא או"ג שכל וקטוריה נורמלים.

5. נרמלו את הוקטור $\mathbb{R}^3\ni v=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} v = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\|\hat{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^3}{14}} = 1$$