פתרון תרגיל 12 - לינארית 1 - וקטורי קוארדינטות ודטרמיננטה

01.01.2019

שאלה 1. נתון הבסיס הבא ב$\mathbb{R}^3$:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. ויהיו:

$v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}$ וקטורים ב $\mathbb{R}^3$.

מצאו את $[v_1]_B\,,[v_2]_B\,,[v_3]_B$.

פתרון.

נמצא באופן כללי $\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]_B$. לשם כך, נחפש α,β,γ (התלויים בx,y,z) כך שייתקיים

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 3R_2 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & z-3x+3y \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_3 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-2y-z \\ 0 & 1 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & z-3x+3y \end{array}\right)$$

כלומר

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2y-z \\ x-y \\ z-3x+3y \end{pmatrix}$$

ומכאן,

$$[v_1]_B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$[v_2]_B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_3]_B = \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

שאלה 2. יהי B בסיס למרחב וקטורי V ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $v, w \in V$.
הוכיחו כי:

1. $v = 0 \iff [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $v = w \iff [v]_B = [w]_B$

3. לכל $a \in \mathbb{F}^n$ קיים $v \in V$ כך ש $[v]_B = a$

4. $[\alpha v + \beta w]_B = \alpha [v]_B + \beta [w]_B$

פתרון.

נסמן את איברי הבסיס: $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$. אזי:

1.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = 0v_1 + \cdots + 0v_n = 0$$

2. נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ו $[w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. אזי:

$$[v]_B = [w]_B \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \iff \forall i : \alpha_i = \beta_i$$
$$\iff v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = w$$

3. יהי $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ וקטור כלשהו של $\mathbb{F}^n$. אזי הוקטור

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

מקיים $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B$.

4. נסמן כמו קודם $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ו $[w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. לכן

$$\alpha v + \beta w = \alpha (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) v_n$$

לכן,

$$[\alpha v + \beta w]_B = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\beta_1 \\ \vdots \\ \beta\beta_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha [v]_B + \beta [w]_B$$

שאלה 3. יהי $B=\{v_1,\cdots,v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $u_1,\cdots u_m\in V$.

הוכיחו כי הקבוצה $\{u_1,\cdots,u_m\}$ בת"ל (כוקטורים בV) אם ורק אם $\{[u_1]_B,\cdots[u_m]_B\}$ בת"ל (כוקטורים ב$\mathbb{F}^n$).

<u>הערה:</u> ניתן להשתמש בטענה הבאה ללא הוכחה:
לכל $\alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{F}$ מתקיים כי

$$\left[\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i\right]_B=\sum_{i=1}^m\alpha_i\left[u_i\right]_B$$

פתרון.

$\Longleftarrow$: נניח כי הקבוצה $\{u_1,\cdots,u_m\}$ בת"ל, וצריך להוכיח כי $\{[u_1]_B,\cdots[u_m]_B\}$ בת"ל.

נקח צירוף לינארי מתאפס, ונוכיח כי לכל i, $\alpha_i=0$:

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i\left[u_i\right]_B=0=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=[0]_B$$

לפי ההערה נקבל

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i\left[u_i\right]_B=\left[\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i\right]_B=[0]_B$$

ולפי שאלה קודמת

$$\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i=0$$

זהו צירוף לינארי מתאפס של הוקטורים $\{u_1,\cdots,u_m\}$ שאנו יודעים שהם בת"ל, ולכן לכל i, $\alpha_i=0$, כדרוש.

$\Longrightarrow$:נניח כי הקבוצה $\{[u_1]_B,\cdots[u_m]_B\}$ בת"ל, וצריך להוכיח כי $\{u_1,\cdots,u_m\}$ בת"ל.

נקח צירוף לינארי מתאפס, ונוכיח כי לכל i, $\alpha_i=0$:

$$\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i=0$$

לפי שאלה קודמת

$$\left[\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i\right]_B=[0]_B=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

ולפי ההערה

$$\left[\sum_{i=1}^m\alpha_iu_i\right]_B=\sum_{i=1}^m\alpha_i\left[u_i\right]_B=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

זהו צירוף לינארי מתאפס של הוקטורים $\{[u_1]_B,\cdots[u_m]_B\}$ שאנו יודעים שהם בת"ל, ולכן לכל i, $\alpha_i=0$, כדרוש.

שאלה 4. מצאו את כל התמורות בS_4. כתבו כל תמורה בשתי ההצגות שלמדנו.

פתרון.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=(3\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}=(2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(2\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(2\ 3\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=(2\ 4\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=(1\ 3)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}=(1\ 2)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\ 2)(3\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2\ 4\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4\ 2)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2\ 4)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3\ 2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 2\ 3)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 4)(2\ 3)\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3)(2\ 4)$$

שאלה 5. יהיו $\sigma=(1\ 2\ 6\ 4)\,,\tau=(5\ 6\ 1\ 3)$ תמורות בS_6.

1. חשבו במפורש את $\sigma\circ\tau$ בשתי ההצגות.
2. מצאו את הסימן של $\sigma\circ\tau$.

פתרון.

.1

$$\sigma\circ\tau=(1\ 2\ 6\ 4)(5\ 6\ 1\ 3)=(1\ 3\ 5\ 4)(2\ 6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&5&1&4&2\end{pmatrix}$$

2. לפי סעיף 1, ניתן לחשב את כמות החיתוכים בהצגה של מטריצה, ולקבל שיש מספר זוגי של חיתוכים, ולכן הסימן הוא 1.

דרך נוספת, היא לחשב ישירות מσ וτ

$$sign(\sigma\circ\tau)=sign(\sigma)\,sign(\tau)=(-1)^{4-1}(-1)^{4-1}=(-1)(-1)=1$$

שאלה 6. נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\2&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

חשבו את $\det(A)\,,\det(B)$ לפי תמורות.

פתרון.

$$\det(A) = 1\cdot 6 - 4\cdot 2 = -2$$

$$\det(B) = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 0 - 3\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 0 - 2\cdot 3\cdot 2 = 4 + 2 - 6 - 12 = -12$$